I) Formes bilinéaires

1) **Définition :** Soit E un $\mathbb{R}$ev. Une forme bilinéaire sur E est une application $\varphi : \begin{array}{l} E^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \varphi(x,y) \end{array}$, linéaire sur x et sur y.
On dit qu'elle est symétrique si $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$. Et antisymétrique si $\forall x, y$, $\varphi(x,y) = -\varphi(y,x)$

2) **Exemple :** Le produit scalaire usuel est une FBS. Ou encore, soit E un $\mathbb{R}$ev de dim finie et ψ_1, ψ_2 deux formes linéaires sur E. Alors $\psi_1 \otimes \psi_2 : (x,y) \mapsto \psi_1(x) \times \psi_2(y)$ est une FB.

3) **Espace $\mathcal{L}_2(E,K)$:** C'est l'espace des formes bilinéaires sur E. C'est un $\mathbb{R}$ev, sev de $\mathcal{F}(E^2,\mathbb{R})$. L'ens des symétriques est $\mathcal{S}_2(E,\mathbb{R})$, et antisym $\mathcal{A}_2(E^2,\mathbb{R})$

4) **Matrices dans une base** (dim $E = n$)

a/ **Expression analytique d'une FB :** Soit E rapporté à $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors $\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \cdot \varphi(e_i, e_j)$. D'où : $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j) \cdot (e_i^* \otimes e_j^*)$

. **Propriété :** La famille $(e_i^* \otimes e_j^*)$ est une base de $\mathcal{L}_2(E,\mathbb{R})$. Donc $\dim \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R}) = n^2$.

b/ **Expression de la matrice :** $\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}) = [\varphi(e_i, e_j)]_{i,j \in [\![1,n]\!]} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c/ **Expression de φ par sa matrice :** $\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B})$ est l'unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y) = {}^tXAY$.

On définit ainsi $\alpha : \begin{array}{l} \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \varphi \mapsto \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}) \end{array}$ qui est un isomorphisme d'ev.

d/ **Formes bilinéaires symétriques ou antisym :** Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ base de E. φ sym (resp. antisym) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B})$ sym (resp. anti sym).

. **Corollaire :** Grace à l'isomorphisme $\alpha : \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit : $\dim \mathcal{S}_2(E,\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_2(E,\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Donc : $\mathcal{L}_2(E,\mathbb{R}) = \mathcal{S}_2(E,\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_2(E,\mathbb{R})$.

5) **Changement de base, rang**

a/ **Changement de base :** Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_2(E,\mathbb{R})$. Soit $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ et $A = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B})$, $A' = \mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}')$.
On sait que $X = PX'$ et $Y = PY'$, donc $A' = {}^tPAP$.

b/ **Rang d'une FB :** $\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}(\mathrm{mat}(\varphi, \mathcal{B}))$ indépendant de la base choisie.

c/ **Définition :** Deux matrices A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites congruentes s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A' = {}^tPAP$. C'est une RST.
A et A' congruentes $\Leftrightarrow$ elles représentent la même FB.

II) Formes Quadratiques

1) **Définition :** φ est une FBS sur E. On lui associe $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto q(x) = \varphi(x,x) \end{array}$ sa forme quadratique associée.

2) **Identités :** Soit q une FQ sur E, associée à $\varphi \in \mathcal{S}_2(E,\mathbb{R})$. Alors, $\forall x, y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

- . $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$
- .. $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\varphi(x,y)$] Polarisation
- ... $q(x+y) - q(x-y) = 4\varphi(x,y)$] Polarisation
- .... $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$] Parallélogramme.

3) **Exemples :**
. Sur $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x.y$ est une FBS et sa FQ associée est $x \mapsto x^2$.
.. Sur $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel $(x,y) \mapsto (x|y)$ donne la FQ $x \mapsto (x|x) = \|x\|^2$.
... Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAB)$ est une FBS dont la FQ associée est $A \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAA)$.
.... Soit $\psi \in E^*$, et $\varphi : (x,y) \mapsto \psi(x).\psi(y)$, une FBS. Alors $q = \psi^2$ est le carré d'une forme linéaire.
..... Soit $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, $\varphi : (f,g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ une FBS. Sa FQ associée est $q : f \mapsto \int_a^b f(t)^2\,dt$.

4) **Forme polaire :** Théorème : L'application $\beta : \begin{array}{l} \mathcal{S}_2(E,\mathbb{R}) \to Q(E) \\ \varphi \mapsto q \end{array}$ est un isomorphisme d'ev. Et $\varphi = \beta^{-1}(q)$ s'appelle la forme polaire de q.

. La forme polaire est obtenue par : $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right) \\ \text{et } \varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left(q(x+y) - q(x-y)\right) \end{array} \right.$

5) **En dimension finie**

a/ **Définition :** Soit $\mathcal{B}$ une base de E. La matrice de la FQ q est : $\mathrm{mat}(q,\mathcal{B}) = \mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B})$ symétrique. Alors on définit aussi $\mathrm{rg}(q) = \mathrm{rg}\,\varphi$

b/ **Définition :** Soit $A = \mathrm{mat}(q,\mathcal{B})$. Alors $\det A$ est le discriminant de la FQ q, noté $\Delta(q,\mathcal{B})$.
Il dépend de la base choisie : $\Delta(q,\mathcal{B}') = (\det P)^2 \cdot \Delta(q,\mathcal{B})$. En revanche, sa nullité et son signe sont indépendants de la base.
Lorsque $\Delta(q,\mathcal{B}) \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(q) = n$ et on dit que q est non dégénérée. Si $\mathrm{rg}(q) < n$, alors q est dégénérée.

c/ **Dimension :** β étant un isomorphisme, $\dim Q(E) = \frac{n(n+1)}{2}$.

d/ **Expression analytique :** Soit dans $\mathcal{B}$, $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Alors on peut écrire : $q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2}_{\text{Termes carrés}} + \underbrace{2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j}_{\text{Termes rectangles}}$

III) Décomposition en carrés (dim finie)

1) **Bases orthogonales :** . **Définition :** Soit q une FQ sur E, de forme polaire φ. On dit que x et y sont q-orthogonaux si $\varphi(x,y) = 0$.

. **Définition 2 :** On dit que : $\mathcal{B}$ est une base q-orthogonale de E $\Leftrightarrow$ $\forall i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$.
Dans une telle base, $\mathrm{mat}(q,\mathcal{B}) = \mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} q(e_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(e_n) \end{bmatrix}$.

2) **Décomposition en carrés :**

a/ **Définition :** Soit $q \in Q(E)$, on cherche à obtenir $q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \psi_i^2$ avec $(\psi_1, \dots, \psi_r)$ des formes linéairement indépendantes sur E.

b/ **Lien avec les bases orthogonales :** Si $q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i^2$, avec $(\psi_1, \dots, \psi_n)$ une base de E^*, alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ antiduale est q-orthogonale.
Dans ce cas, le rang de q est égal au nombre de coeff non nuls dans la décomposition en carrés.

IV Formes quadratiques positives

1) <u>Définition</u> : Soit $q \in Q(E)$. On dit qu'elle est positive si $\forall x,\ q(x) \geq 0$. Inversement, on dit qu'elle est négative si $\forall x,\ q(x) \leq 0$.

2) <u>Premières propriétés</u> :
. Si $q \geq 0$, alors les coefficients diagonaux de $A = mat(q, \mathcal{B})$ sont ≥ 0.
.. Si la base $\mathcal{B}$ est q orthogonale, alors : $q \geq 0 \Leftrightarrow \forall i,\ q(e_i) \geq 0$.
... $q \geq 0 \Leftrightarrow$ dans toute décomposition en carrés, tous les coefficients sont ≥ 0.
.... Discriminant donc : $q \geq 0 \Rightarrow \Delta(q, \mathcal{B}) \geq 0$.

3) <u>Propriétés fondamentales</u> :

a/ <u>Inégalité de Cauchy Schwartz</u> : Soit $q \in Q(E)$ positive et de forme polaire φ. Alors, $\forall x, y \in E$, $\varphi(x,y)^2 \leq q(x) \cdot q(y)$

b/ <u>Inégalité de Minkowski</u> : Soit $q \in Q(E)$ positive. Alors : $\forall x, y \in E$, $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$.

c/ <u>Propriété</u> ; Soit $q \in Q(E)$ positive. Soit $x \in E$ tq $q(x) = 0$. Alors $\forall y \in E$, $\varphi(x,y) = 0$. Donc $x \perp E$.
Matriciellement, si $q \geq 0$ de matrice A, alors ${}^tXAX = 0 \Rightarrow AX = 0$.

4) <u>Matrices symétriques positives réelles</u>

a/ <u>Définition</u> : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique. A est positive $\Leftrightarrow \forall X,\ {}^tXAX \geq 0$.

b/ <u>Propriété</u> : q positive $\Leftrightarrow A = mat(q, \mathcal{B})$ positive.

c/ <u>Remarque</u> : Si A est symétrique réelle positive, alors ${}^tXAX = 0 \Rightarrow AX = 0$

5) <u>Formes quadratiques définies positives</u>

a/ <u>Définition</u> : Soit $q \in Q(E)$. q est définie positive $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ q(x) \geq 0$ et $q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

b/ <u>Dimension finie</u> : q définie positive $\Leftrightarrow$ $q \geq 0$ et $\operatorname{rg} q = n$ $\Leftrightarrow$ $q \geq 0$ et non dégénérée. Donc q déf $\geq 0 \Rightarrow \Delta(q, \mathcal{B}) > 0$.
. <u>Propriété</u> : q déf $\geq 0 \Leftrightarrow$ tous les coeff de la décompo en carrés sont positifs et au nombre de n.

c/ <u>Egalité de Cauchy Schwartz</u> : Soit $q \in Q(E)$ définie positive. Alors : $\varphi(x,y)^2 = q(x)q(y) \Leftrightarrow (x,y)$ liée.

d/ <u>Egalité de Minkowski</u> : Soit $q \in Q(E)$ définie positive. Alors : $\sqrt{q(x+y)} = \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)} \Leftrightarrow (x,y)$ liée

e/ <u>Matriciellement</u> : q définie $\geq 0 \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXAX > 0 \Leftrightarrow A$ est définie positive.

V Signature d'une forme quadratique ($\dim E = n$)

1) <u>Définition</u> : Soit $q \in Q(E)$. Soit F un sev de E. On dit que F est : $\begin{cases} \text{positif} \Leftrightarrow q_F \geq 0 \\ \text{négatif} \Leftrightarrow q_F \leq 0 \\ \text{déf} \geq 0 \Leftrightarrow q_F \text{ déf} \geq 0 \\ \text{déf} \leq 0 \Leftrightarrow q_F \text{ déf} \leq 0 \end{cases}$. On remarque que $F = \{0\}$ est déf ≥ 0 et déf ≤ 0.
. La signature de q est (s, t) avec $s = \max\{\dim F \,/\, F \text{ déf} \geq 0\}$ et $t = \max\{\dim F \,/\, F \text{ déf} \leq 0\}$.

2) <u>Théorème d'inertie de Sylvester</u> : Soit $q \in Q(E)$ et $\mathcal{B}$ q-orthogonale. Soit $A = mat(q, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} q(e_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q(e_n) \end{bmatrix}$.
Alors : $s = \operatorname{card}\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, q(e_i) > 0\}$ et $t = \operatorname{card}\{i \in [\![1,n]\!] \,/\, q(e_i) < 0\}$.

3) <u>Théorème de la base réduite</u> : Soit $q \in Q(E)$, et $\operatorname{sgn}(q) = (s,t)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $mat(q, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} I_s & & 0 \\ & -I_t & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} = J_n(s,t)$

4) <u>Version matricielle du théorème de la base réduite</u> : Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n. Alors $\exists!$ matrice $J_n(s,t)$ congruente à A.

5) <u>Classification des classes de congruence des matrices sym. réelles</u> :
. <u>Théorème</u> : A et A' deux matrices sym réelles. A et A' congruentes $\Leftrightarrow$ elles ont même signature.
. <u>Théorème</u> : Chaque classe de congruence de matrices sym réelles contient une unique matrice $J_n(s,t)$.
Il y a donc $C^2_{n+2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes d'équivalence.

6) <u>FQ équivalentes</u>

a/ <u>Définition</u> : E un $\mathbb{R}$ev de dim n. Soit $q, q' \in Q(E)$. On dit que q et q' sont équivalentes s'il existe $u \in GL(E)$ tq $q' = q \circ u$.

b/ <u>Matriciellement</u> : q et q' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ pour toute base de E, $mat(q, \mathcal{B})$ et $mat(q', \mathcal{B})$ sont congruentes.

c/ <u>Théorème</u> : q et q' sont équivalentes $\Leftrightarrow$ elles ont même signature.

VI Compléments utiles

1) <u>Propriété</u> : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice sym réelle. Alors : A positive $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,/\, A = {}^tBB$.

2) <u>Caractérisation des matrices déf ≥ 0</u> : A est définie positive $\Leftrightarrow \forall p \in [\![1,n]\!],\ \Delta_p > 0$ avec $\Delta_p = \Delta\left(q_{|\operatorname{vect}(e_1, \dots, e_p)}, (e_1 \dots e_p)\right)$.