

I Espace $L^1(A)$

1) Définition.

- $\mathcal{L}^1(A) = \{ f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable} / \int_A |f(u)| du < +\infty \}$
- $L^1(A)$ est l'espace des fonctions réelles pour la relation d'équivalence $f = g$ pp.
- $\forall f \in L^1(A)$, on pose $\|f\|_1 = \int_A |f(u)| du$, c'est la norme de CV en moyenne.

2) Propriétés

- Théorème: $(L^1(A), \|\cdot\|_1)$ est un evn complet.
- Théorème: Soit (f_n) une suite de $L^1(A)$ convergant en moyenne vers $\tilde{f} \in L^1(A)$. Alors il ya une sous-suite $(f_{n_k})_k$ qui converge pp vers \tilde{f} quand $k \rightarrow \infty$.
- Corollaire: Si $f_n \xrightarrow{L^1} \tilde{f}$, et que $f_n \xrightarrow{pp} \tilde{g}$, alors $\tilde{f} = \tilde{g}$.
- Remarque: $CV L^1 \not\subset CV pp$, et $CV pp \not\subset CV L^1$.

3) Support compact

- Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, on définit $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega / f(x) \neq 0\}}$
- On note: $\mathcal{C}_c^p(\Omega) = \mathcal{C}_c(\Omega) \cap \mathcal{C}^p(\Omega)$, avec $\mathcal{C}_c(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) \text{ à support compact}\}$.

• Exemple: $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|-1}} & \text{pour } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$

- Théorème: L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $(L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$, i.e. $\forall f \in L^1(\Omega)$, $\exists f_n$ avec $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ tq $\|f_n - f\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

 II Espace $L^2(A)$

1) Définition

- DEF: $f \in \mathcal{L}^2(A) \Leftrightarrow \int_A |f(u)|^2 du < +\infty$
- PROP: $\mathcal{L}^2(A)$ est un ev.
- Soient $f, g \in \mathcal{L}^2(A)$, alors $f \times g \in \mathcal{L}^2(A)$. $\triangleright |f(u) + g(u)|^2 \leq 2(|f(u)|^2 + |g(u)|^2)$
- $\forall f, g \in \mathcal{L}^2(A)$, $(f, g) = \int_A fg du$ est un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(A)$. $|f(u)g(u)| \leq \frac{1}{2}(|f(u)|^2 + |g(u)|^2)$
- PROP: Sur $\mathcal{L}^2(A)$ (et pas sur \mathcal{L}^1), $(f, g) = \int fg du$ est un produit scalaire. Et $\|f\|_2 = \left(\int_A |f(u)|^2 du \right)^{1/2}$ est la norme de CV quadratique.

2) Propriétés

- Théorème: $\mathcal{L}^2(A)$ est un espace de Hilbert
- Théorème: Soit $(f_n) \xrightarrow{L^2} f$, alors $\exists (f_{n_k})_k$ tq $f_{n_k} \xrightarrow{pp} \tilde{f}$.
- Théorème: L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_2)$.

- PROP: Dans ce cas particuliers, on a: A borné dans $\mathbb{R}^d \Rightarrow L^2(A) \subset L^1(A)$, car $\forall f \in L^2$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \sqrt{\text{mes}(A)}$ CS

III. Résultat fondamental

Soit Ω ouvert de \mathbb{R}^d .

DEF: $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est localement int^{lle} $\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \Leftrightarrow \forall K$ compact de Ω , $f \in \mathcal{L}^1(K)$.

PROP: $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega) \Rightarrow (f \cdot \varphi) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$.

PROP: On a :
$$\begin{cases} \mathcal{L}^1(\Omega) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \\ \mathcal{L}^2(\Omega) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \end{cases}$$

Théorème: Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, tq $\int_\Omega f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$.
Alors $\tilde{f} = 0$.

Corollaire: Soit $\tilde{f} \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$, tq $\int_\Omega f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ et $\int_\Omega \varphi(x) dx = 0$.
Alors $\tilde{f} = c \in \mathbb{R}$.

Intégrale de Lebesgue.

I Intégrale des fonctions positives

1) Propriétés principales

À toute fonction $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable on associe $\int_{\mathbb{R}^k} f(x) dx$, vérifiant

$$\begin{cases} \text{Linéarité} & \int \lambda f + \mu g = \lambda \int f + \mu \int g \\ \text{Croissance} & f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g \\ \text{Volume} & \int_{\mathbb{R}^k} \chi_P = m(P) \end{cases}$$

• Théorème de Beppo-Levi: $f_n: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $(f_n) \uparrow$ et ≥ 0 . $\lim f_n(x) = f(x)$.
Alors: $\int_{\mathbb{R}^k} f(x) dx = \lim \int_{\mathbb{R}^k} f_n(x) dx$

2) Ensembles mesurables, et p. partout

• DEF: A est mes. négligeable $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists (P_n)$ tq: $A \subset \bigcup P_n$ et $\sum m(P_n) \leq \varepsilon$

• DEF: Soit une p.p. (P) dépendante de $x \in \mathbb{R}^k$. On dit que (P) est vraie p.p. $\Leftrightarrow \exists$ un est. négligeable A tel que $\forall x \notin A, P(x)$ est vérifiée.

3) Intégrales des fonctions ≥ 0

• PROP: Soit $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. $f = 0$ p.p. $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^k} f dx = 0$

• PROP: $\begin{cases} f \leq g \text{ p.p.} \Rightarrow \int f \leq \int g \\ f = g \text{ p.p.} \Rightarrow \int f = \int g. \end{cases}$ pour $f, g: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$

II Fonctions intégrables

1) Définition et p.p.

• DEF: Soit $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. f int^{bl} $\Leftrightarrow \int |f| dx < +\infty$. L'espace des f^0 int^{bl} est $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$

• PROP: Si $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ int^{bl}, alors $|f| \leq g$ p.p. $\Rightarrow f$ int^{bl}.

• DEF: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k)$. On définit l'intégrale de f : $\int_{\mathbb{R}^k} f dx = \int_{\mathbb{R}^k} f^+ dx - \int_{\mathbb{R}^k} f^- dx$
avec $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$.

• PROP: $\begin{cases} - \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^k) \text{ est un ev, et } f \mapsto \int f \text{ est une forme linéaire sur cet espace.} \\ - f, g \in \mathcal{L}^1, \text{ et } f \leq g \text{ p.p.} \Rightarrow \int f \leq \int g, \text{ de plus } |\int f| \leq \int |f| dx \\ - \text{Soit } f = g \text{ p.p. Alors: } f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1. \end{cases}$

2) Intégration de fonctions à valeurs complexes

• DEF: Soit $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{C}$ mesurable. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \int |f| dx < +\infty$.

• DEF: Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{C})$, on définit $\int_{\mathbb{R}^k} f dx = \int_{\mathbb{R}^k} \text{Re}(f(x)) dx + i \int_{\mathbb{R}^k} \text{Im}(f(x)) dx$.

3) Intégration sur une partie de \mathbb{R}^k

• Soit $f: A \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, on prolonge f par: $f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

On définit $\int_A f dx = \int_{\mathbb{R}^k} f_A(x) dx$. Toutes les relations sont vraies sur A.

• Remarque: Si $A = \bigcup N_i$, avec $m(N_i) = 0$, alors $(f \text{ int^{bl} sur } A) \Leftrightarrow (f \text{ int^{bl} sur } B)$

III Intégration sur des intervalles

1) Sur un segment

- lemme : Pour une f^0 en escalier $C: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\int_a^b C(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} C_i (a_{i+1} - a_i)$
- PROP : Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cgm, alors $f \in \mathcal{L}^1(A)$ et $\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b C_n(x) dx$ où (C_n) suite de fonctions en escalier $\Rightarrow f$.

2) Sur un intervalle qcg

- PROP : Soit $f: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$ mesurable. Alors $\int_I f(x) dx = \sup_{[a, b] \subset I} \int_a^b f(x) dx \in \overline{\mathbb{R}_+}$

IV Théorèmes fondamentaux

1) Théorème de CV

Soit $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ intbls tq : $\left\{ \begin{array}{l} \exists f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ avec } f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \text{ pp sur } A \\ \exists g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \text{ intbl telle que } \forall n, |f_n(x)| \leq g \text{ pp sur } A \end{array} \right\}$ alors $\int_A f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n$

2) Intégrales d'un paramètre

- Théorème de continuité : $\left\{ \begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^k \\ E \subset \mathbb{R}^p \\ f: A \times E \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \right.$ tq $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in E, x \mapsto f(x, t) \text{ intbl sur } A \\ \dots x \mapsto f(x, t) \text{ est } C^0 \text{ en un pt } t_0, \text{ pp sur } A. \\ \dots \exists g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \text{ intbl tq } |f(x, t)| \leq g(x) \text{ pp.} \end{array} \right.$

alors $F(t) = \int_A f(x, t) dx$ est continue en t_0 .

- Théorème de continuité (2) : Soit $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, et $\varphi \in \mathcal{L}^1(I)$. $\forall a \in I$, on pose $F(t) = \int_a^t \varphi(x) dx$. Alors F est continue sur I .

- Théorème de dérivation : $\left\{ \begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^k \\ I =]a, b[\\ \mathbb{I}: A \times \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R} \\ f: (x, t) \mapsto f(x, t) \end{array} \right.$ tq $\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in E, x \mapsto f(x, t) \text{ intbl sur } A \\ \dots \exists N \text{ négligeable tq } \forall n \in \mathbb{N}, x \mapsto f(x, t) \text{ } \mathcal{D}^1 \text{ sur } I \\ \dots \exists g: A \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+} \text{ tq intbl et } \forall t \in \mathbb{I}, \forall x \in A, \left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \end{array} \right.$
alors $F(t) = \int_A f(x, t) dx$ est \mathcal{D}^1 sur I , et $F'(t) = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$.

3) Intégrales multiples

- Théorème de Fubini - Tonelli : Soit $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $\int_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q} f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^p} \int_{\mathbb{R}^q} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} f(x, y) dx dy$
- Théorème de Fubini : Soit $f: \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors on peut permuter les intégrales.

4) Changement de variables

Soient Ω et D deux ouverts de \mathbb{R}^k . Soit $\varphi: \Omega \rightarrow D$ une bijection continûment différentiable, ie les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ sont C^0 . On note $x = \sum_{i=1}^k x_i e_i$, et $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x_1, \dots, x_k) \cdot e_i$

$$J_\varphi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_k} \end{bmatrix}$$

On note le Jacobien de φ en x : $\Delta(x) = \det J_\varphi(x)$. Et on suppose que $\forall x \in \Omega$, $\Delta(x) \neq 0$.

- Théorème de changement de variables :
 .. Si $f: D \rightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $\int_D f(y) dy = \int_\Omega f(\varphi(x)) |\Delta(x)| dx$
 .. Si $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, alors f intbl sur D $\Leftrightarrow (f \circ \varphi \cdot |\Delta|)$ intbl sur Ω .