

I Définitions et convergence

a) Définition: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et (S_n) tq $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Le couple $((u_n), (S_n))$ s'appelle la "série de terme général u_n ".
On la note $\sum u_n$ ou $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

• Remarque: Chaque suite déterminée \leftrightarrow autre car: $u_n = S_n - S_{n-1}$, et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. $S_0 = u_0$.

a) Convergence, somme de la série: $\sum u_n$ est CV $\Leftrightarrow (S_n)$ CV. \Leftrightarrow Nature de la série: DV ou CV.
• Si $\sum u_n$ ne converge pas, elle "diverge".

b) Critère de Cauchy

a) E est complet: Alors (S_n) CV $\Leftrightarrow (S_n)$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall m > n \geq N \Rightarrow \|S_m - S_n\| < \varepsilon$.

• Théorème: Dans E complet, $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / \forall m > n \geq N \Rightarrow \|\sum_{k=n+1}^m u_k\| < \varepsilon$

b) Exemple: la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ DV car: $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.

c) Convergence absolue: On dit que $\sum u_n$ est ACV si $\sum \|u_n\|$ est CV.

• Théorème (de la V absolue): Si une série est ACV alors elle est CV. La réciproque est fautive.

a) Condition nécessaire de CV: Si $\sum u_n$ CV, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

b) Exemples utiles

a) Série géométrique: $\sum a^n$, $a \in \mathbb{C}$, est CV $\Leftrightarrow |a| < 1$. Si elle converge, la somme est $\frac{1}{1-a}$.

b) Série télescopique: Soit $u_n = a_1 \dots a_n$, $(a_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow (a_n)$ CV.

II Structures

a) Opérations

a) Propriété: Si $\lambda \in K$, alors $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum \lambda u_n$ CV.

b) Propriété: $\sum u_n$ et $\sum v_n$ CV $\Leftrightarrow \sum (u_n + v_n)$ CV vers $(u+v)$.

• $\sum u_n$ CV et $\sum v_n$ DV $\Leftrightarrow \sum (u_n + v_n)$ DV.

• $\sum u_n$ DV et $\sum v_n$ DV \Leftrightarrow On n'en sait rien...

III Reste d'une série CV

a) Reste: Soit $\sum u_n$ CV, avec $u_n \in E$, de somme U . Alors $\sum_{m=n+1}^{\infty} u_k$ CV aussi. On définit: $R_n = U - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$.

b) Modification d'un nombre fini de termes: Soit $\sum (u_n)$, et $\sum (u'_n)$ tq $\exists N_0 / \forall n > N_0 \Rightarrow u'_n = u_n$. Alors les deux ont la même nature.

IV Associativité / Commutativité

La commutativité des termes n'est pas conservée dans le cas d'une somme ∞ (série CV). On étudie donc l'associativité.

a) Exemple: $u_n = (-1)^n$, $\sum u_n$ DV grossièrement. Or $(1-1) + (1-1) + \dots = 0$. Donc le groupement de termes ne s'applique pas!

b) Cas d'une série CV: Soit $\sum u_n$ CV. Soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On définit: $v_0 = \sum_{n=0}^{\varphi(0)-1} u_n, \dots, v_p = \sum_{n=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} u_n$.
La série $\sum v_p$ est alors CV et de somme U , car (V_n) est la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) .

Donc, pour une série CV, on peut grouper les termes et calculer la somme.

a) Réciproque partielle: En conservant les notations précédentes, on introduit $b_p = \sum_{n=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} \|u_n\|$.

Alors: $\left. \begin{array}{l} \sum v_p \text{ CV} \\ \lim_{p \rightarrow \infty} b_p = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \sum u_n \text{ CV}$

• Cas particulier: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ et il existe $K / \forall p, \varphi(p+1) - \varphi(p) \leq K$, alors $\lim_{p \rightarrow \infty} b_p = 0$. Le théorème s'applique et $\sum u_n$ est CV.