

Sont E et F de dimensions finies p et m . On peut les identifier à \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^m .

I Différentiabilité

- 1) Définition: Soit $f: U \rightarrow F$, avec U ouvert de E . Alors: f diff^{able} en $a \in E \Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{L}(E, F) / \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - l(h)}{\|h\|} = 0$
- $$\Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{L}(E, F) / f(a+h) = f(a) + l(h) + o(\|h\|)$$
- $$\Leftrightarrow \exists l \in \mathcal{L}(E, F) / f(a) = f(a) + l(a-a) + o(\|a-a\|).$$

2) Différentielle ou application linéaire tangente.

Propriété: Si f est diff^{able} en $a \in E$, l'application linéaire l est unique.

Propriété: L'application linéaire l s'appelle la "différentielle de f en a ", ou application linéaire tangente en a , notée: df_a .

Remarque: la fonction f est définie sur $U \subset E$, mais df_a est définie sur E .

3) Exemples simples:

• Si f est cte, alors $O_{\mathcal{L}(E, F)}$ convient en tout $a \in E$.

• Si f est linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$, alors $df_a = f$ convient $\forall a \in E$.

... Si $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$, f est diff^{able} en $O_{\mathbb{R}^3}$ et $df_0 = O_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})}$.

4) Propriétés:

• Si f est diff^{able} en a , alors f est C^0 en a .

• Soient $f, g: U \rightarrow F$, diff^{ables} en $a \in U$. Alors $(f+g)$ est diff^{able} en a , et $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$.

• L'ensemble $\mathcal{D}_a(U, F)$ des applications $f: U \rightarrow F$ diff^{ables} en a est un sev de $\mathcal{F}(U, F)$.

• Si $F = \prod_{i=1}^n F_i$, alors on peut définir $f(a) = (f_1(a), \dots, f_n(a))$ avec $f_i = p_i \circ f$. Alors f diff^{able} en $a \Leftrightarrow \forall i, f_i$ diff^{able} en a et dans ce cas, $df_a = (df_i)_i = p_i \circ df_a$.

5) Cas particuliers où $p = 1$:

On suppose $E = \mathbb{R}$. Soit $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow F$, avec U ouvert de \mathbb{R} . Alors $l \in \mathcal{L}(E, F)$ est entièrement déterminée par $l(1)$. Si $l(1) = A$, on a: f diff^{able} en $a \in U \Leftrightarrow \exists A \in F / \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Ah}{h} = 0 \Leftrightarrow f$ dérivable en a .

On constate que $df_a(h) = f'(a)h$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

6) Différentiabilité sur un ouvert.

a) Définition: Soit $f: U \subset E \rightarrow F$. Si f est diff^{able} en tout point de U , on dit que f est diff^{able} sur U .

On définit alors l'application différentielle de f sur U : $df: (U \rightarrow \mathcal{L}(E, F))$

On remarque que df est aussi une f^0 de plusieurs variables. $\{a \mapsto df(a)\}$

b) Définition: f est C^1 sur $U \Leftrightarrow f$ est diff^{able} sur U et df est C^0 sur U .

II Composée d'applications différentiables

1) Théorème: Soit $f: U \subset E \rightarrow F$ et $g: V \subset F \rightarrow G$, tq $f(u) \in V$. On suppose f diff^{able} en $a \in U$, et g diff^{able} en $f(a) \in V$. On note $b = f(a)$. Alors: $g \circ f$ est diff^{able} en $a \in U$, et $d(g \circ f)(a) = dg(b) \circ df(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$.

2) Différentiabilité sur un ouvert

a) Théorème: Si $f: U \rightarrow F$ et $g: V \subset F \rightarrow G$ sont diff^{ables} sur U et V , alors $(g \circ f)$ diff^{able} sur U .

b) Classe C^1 : Si f et g sont C^1 sur U et V , alors $(g \circ f)$ est C^1 sur U .

3) Cas particuliers: • Si $f: U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors si elles sont diff^{ables}: $dg(y)(h) = h \cdot g'(y)$.

Donc: $d(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \times df(a) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

$\Leftrightarrow d(g \circ f) = (g' \circ f) \times df$

• Si $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: V \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors si elles sont C^1 , $(g \circ f)'(a) = dg_{f(a)}(f'(a))$.

4) Difféomorphismes

a) Définition: Soient U et V deux ouverts de E et F . Soit $f: U \rightarrow V$. f est un difféomorphisme de U sur $V \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ bijective} \\ f \text{ diff^{able} sur } U \\ f^{-1} \text{ diff^{able} sur } V \end{cases}$

Si de plus, f et f^{-1} sont C^1 , on dit que f est un C^1 difféomorphisme.

b) Propriété: Soit f un difféomorphisme de $U \subset E \rightarrow V \subset F$. Alors si $a \in U$, $df(a)$ est un isomorphisme de $E \rightarrow F$, et

$d(f^{-1})(f(a)) = (df(a))^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque.

On remarque que dans ce cas, E et F sont isomorphes $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$.

5) Théorèmes d'inversion:

a) Théorème d'inversion locale: Soit $f: U \subset E \rightarrow F$, de classe C^1 , et $a \in U$. On suppose que $df(a)$ est un isomorphisme de $E \rightarrow F$.

Alors \exists un ouvert $U' \subset U$, tq $a \in U'$ et: $V' = f(U')$ ouvert et $f|_{U'}$ est un C^1 difféo de U' sur V' .

b) Théorème d'inversion globale: Soit $f: U \subset E \rightarrow F$, de classe C^1 . On suppose: f injective ET $\forall x \in U$, $df(x)$ isomorphisme de $E \rightarrow F$.

Alors: $V = f(U)$ est ouvert dans F , et f est un C^1 difféo de U sur V .

III Dérivées partielles

1) Dérivées suivant un vecteur non nul

a) Définition: Soit $f: U \subset E \rightarrow F$, $a \in U$ et $v \in E \setminus \{0\}$. Si $t \mapsto f(a+tv)$ est \mathbb{R}^1 en 0 , sa dérivée est "la dérivée de f en a , suivant v ".

On note: $D_v f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \in F$

b/ Propriété: Si f est différentiable en a , et si $v \in E$, alors f admet une dérivée suivant le vecteur v : $D_v f(a) = df(a)(v)$.

2) Dérivées partielles:

- a/ Applications partielles: Soit E rapporté à $B = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$, et $a \in U$ s'écrivant $a = (a_1, \dots, a_p)$.
Alors $\forall i = 1, \dots, p$, l'application partielle j_i^a en a est $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_p)$.
- b/ Définition: Si la j_i^a application partielle est D^1 en a_j , sa dérivée en ce point est appelée la " j_i^a dérivée partielle de f en a ".
Si elle existe, elle est égale à $D_{e_i} f(a)$.
- c/ Propriété: la dérivée partielle de f en a par rapport à x_i n'est autre que la dérivée de f en a suivant e_i . Notation: $D_{j_i} f(a)$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

3) Cas où f est différentiable en a : Théorème: Si f est différentiable en a , elle admet en " a " une j_i^a dérivée partielle. De plus, $\forall h \in F$:
$$df_a(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot h_j$$
, qui s'écrit encore: $D_x f(a) = \sum_{j=1}^p h_j \cdot D_{j_i} f(a)$.

. Remarque: On écrit aussi $df(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot e_j^*$
et $df = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j^*$

4) Exemple: L'existence de dérivées partielles partout n'entraîne pas la différentiabilité. Cela n'entraîne même pas la continuité!

5) Applications dérivées partielles

- a/ Définition: Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = D_{j_i} f(a)$ existe pour tout $x \in U$, on définit l'application dérivée partielle: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = D_{j_i} f: \begin{cases} U \rightarrow F \\ a \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \end{cases}$
- b/ Propriétés: Si f est C^1 sur U , les dérivées partielles existent et sont C^0 sur U .
- c/ Réciproque: Théorème: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$, admettant dans U des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continues. Alors f est C^1 dans U .
Donc:
 $f \text{ } C^1 \text{ sur } U \iff$ les dérivées partielles de f sur U existent et sont continues.

IV) Matrice Jacobienne

1) Définition: Soit E rapporté à $B = (e_1, \dots, e_p)$ et F à $C = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$, supposée différentiable en $a \in U$. Donc $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$.
Sa matrice dans les bases B et C est la matrice Jacobienne de f en a : $J_f(a) = \text{mat}(df(a), B, C) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

2) Explicitons $J_f(a)$: $J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(a) \end{bmatrix}$ car $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = df_i(a)(e_j)$.
. Définition: Quand $n=p$, le déterminant de $J_f(a)$ s'appelle le "jacobien" de f en a , noté $\text{Jac } f(a)$ ou $\frac{\Delta(f_1, \dots, f_n)}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}(a)$.

3) Matrice Jacobienne d'une composée

- a/ Propriété: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$ et $g: V \subseteq F \rightarrow G$, avec $f(U) \subset V$. On suppose f différentiable en a , et g différentiable en $b = f(a)$.
On sait que $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$. Soit: $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.
b/ Explicitons: $J_{g \circ f}(a) = \left[\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) \right]_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$ et c'est le produit $J_g(f(a)) \times J_f(a)$, d'où: $\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$.
Celle égalité dans \mathbb{R} peut se traduire dans G par: $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \times \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$.
c/ Exemple: Dans \mathbb{R}^2 , soit $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g: V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(x, y)) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y)$.

4) Matrice Jacobienne d'une application réciproque.

a/ Cadencé: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow V \subseteq F$ une C^1 bijection de U sur V . On sait que $d(f^{-1})(b) = (df(a))^{-1}$.
Matériellement, cela équivaut à: $J_{f^{-1}}(b) = [J_f(a)]^{-1}$.
Et comme df_a est un isomorphisme de E sur F , alors $\text{Jac } f(a) \neq 0$, et: $\forall x \in U, df_x$ isom de E sur $F \iff \text{Jac } f(a) \neq 0$ sur U .

V) Applications de classe C^k , $k \geq 2$

- 1) Dérivées partielles d'ordre 2:
a/ Définition: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$. On suppose $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ définie dans U . On définit (si on peut) par itération: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$.
b/ Théorème de Schwarz: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$. On suppose que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent sur U et sont continues en $a \in U$.
Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

2) Applications de classe C^k

- a/ Définition: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$. On dit que f est C^k sur U si toutes les dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ de f existent et sont C^0 sur U .
- b/ Propriétés: $\forall k \geq 2, f \in C^k \iff f \in C^{k-1}$
.. $f \in C^k \iff f \in C^{k-1}$ et les dérivées partielles de f d'ordre $(k-1)$ sont C^1 et existent.
.. $f \in C^k \iff f \in C^1$ et les dérivées partielles sont C^{k-1} .
- c/ Algèbre des f de classe C^k : Soit f et $g \in C^k$, alors $f \times g$ est aussi C^k .
L'ensemble $C^k(U, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(U, \mathbb{R})$.
- d/ Théorème: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow F$, et $g: V \subseteq F \rightarrow G$ avec $f(U) \subset V$. f et $g \in C^k \iff g \circ f \in C^k$ sur U .

VI) Formes différentielles de degré 1

1) Définition: Soit E un \mathbb{R} -ev de dim finie et U un ouvert de E . On appelle "forme différentielle" sur U de degré 1, toute application $\omega: U \subseteq E \rightarrow E^*$ C^1 et une fonction de plusieurs variables. On supposea toujours la continuité.

2) Expression dans une base: E rapporté à $B: (e_1, \dots, e_p)$. E^* rapporté à $B^*: (e_1^*, \dots, e_p^*)$ notée aussi (dx_1, \dots, dx_p) .

Alors w possible p applications composantes (x_1, \dots, x_p) , $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall x \in U$, $w(x) = \sum_{i=1}^p x_i(x) e_i^* = \sum_{i=1}^p x_i(x) dx_i$

Donc: $w(x)(h) = \sum_{i=1}^p x_i(x) h_i$, $\forall h \in E$.

3) Formes diff^{elle} - exactes

a/ Définition: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, C^1 . Alors $df(x) \in L(E, \mathbb{R}) = E^*$. Par conséquent, $df: U \subseteq E \rightarrow E^*$ est continue et est une forme $\neq 0$ sur U .

Une forme $\neq 0$ $w: U \subseteq E \rightarrow E^*$ est dite "exacte" s'il existe $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ telle que $w = df$. Alors toute f telle que $df = w$ est une "primitive" de w .

b/ Expression dans une base: $w = \sum_{i=1}^p x_i dx_i$ est exacte $\Leftrightarrow \exists f \in C^1(U, \mathbb{R})$ / $\forall i, \frac{\partial f}{\partial x_i} = x_i$.

4) Caractérisation des formes diff^{elle} - exactes de classe C^1

a/ Forme diff^{elle} fermée:

• Théorème: $w: U \subseteq E \rightarrow E^*$, avec $w(x) = \sum_{i=1}^p x_i(x) dx_i$, est une forme diff^{elle} exacte de classe C^1 . Alors $\forall i, j, \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$.

• Définition: Une forme C^1 , $w = \sum_{i=1}^p x_i dx_i$ telle que $\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j}{\partial x_i}$ est dite "fermée".

b/ Condition suffisante: (Théorème de Poincaré) Soit $w: U \subseteq E \rightarrow E^*$ une forme $\neq 0$ C^1 . Alors: $\begin{cases} w \text{ fermée} \\ U \text{ étoilé} \end{cases} \Rightarrow w \text{ est exacte.}$

VII) Gradient

a) Définition: Soit $f: U \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, diff^{ible} en $a \in U$. Alors $df(a) \in E^*$, et $\exists! u \in E$ / $\forall h \in E, df(a)(h) = (u|h)$.

Ce " u " est le vecteur gradient de f en a , et se note $\text{grad} f(a)$.

• Si f est diff^{ible} sur U , alors $\text{grad} f: U \subseteq E \rightarrow E$ est le "champ de gradients" de f .

Rq: On a alors: $f(a+h) = f(a) + (\text{grad} f(a)|h) + o(\|h\|)$.

2) Expression dans une BON: E rapporté à $B: (e_1, \dots, e_p)$ ON. Soit $f: U \subseteq E \rightarrow \mathbb{R}$, diff^{ible} en a . Donc: $\forall h \in E, df(a)(h) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$

Alors: $\text{grad} f(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot e_i$

3) Formes diff^{elle} et champ de vecteurs

a/ Correspondance: Soit E euclidien et $\vec{V}: U \subseteq E \rightarrow E$ un champ de vecteurs continu. On définit $w: U \subseteq E \rightarrow E^*$ ($\vec{V}(x)|\cdot$)

Inversement, $\exists! \vec{V}$ tq $\forall x \in U, \forall h \in E, w(x)(h) = (\vec{V}(x)|h)$.

Dans une BON, les composantes de w et \vec{V} sont les mêmes:

$$w(x) \Big|_{x_i(x)} \in E^* \text{ et } \vec{V}(x) \Big|_{x_i(x)} \in E.$$

b/ Champ de gradient: \vec{V} est un champ de gradient $\Leftrightarrow w$ est exacte.

$\vec{V} = \vec{\text{grad}} f \Leftrightarrow f$ primitive de w