

I) Matrices Équivalentes - Rang d'une matrice.

a) Changement de base pour une matrice d'appl. linéaire: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec β et β' bases de E , γ et γ' bases de F . $P = P_{\gamma'}^{\gamma}$ et $Q = P_{\beta'}^{\beta}$.
 $A = \text{mat}_{\gamma, \beta}(u)$ et $A' = \text{mat}_{\gamma', \beta'}(u)$ alors: $A' = P^{-1}AQ$.

b) Matrices équivalentes: Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. A équivalente à $B \iff \exists P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_n(K) / B = PAQ$.

c) Rang d'une matrice:

a) Définition: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et C_1, \dots, C_p ses colonnes. $\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$

b) Rappel: $A: \mathcal{M}_n(K) \Rightarrow \text{rg } u = \text{rg } A$. Deux matrices équivalentes ont donc le même rang.

c) Théorème: Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$, alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

e) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

f) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

g) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

h) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

i) Théorème: $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ et $\text{rg } A = r$ alors A est équivalente à la matrice $J_{\text{ap}}(r)$.

II) Opérations Élémentaires.

a) Remarque: la multiplication à gauche agit sur les lignes de A . Et la multiplication à droite sur les colonnes.

b) Opérations sur les lignes:

c) (E1): $T_{ij}(x) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & x & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ $T_{ij}(x) = I_n + x E_{ji}$, $\det T_{ij}(x) = 1 + x$.

d) (E2): $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ $\det(P_{ij}) = -1$

e) (E3): $H_i(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\det H_i(\lambda) = \lambda$

$T_{ij}(x).A$ se traduit par $L_i \leftarrow L_i + x L_j$.

$P_{ij}.A$ se traduit par $L_i \leftrightarrow L_j$.

$H_i(\lambda).A$ se traduit par $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

III) Méthode du pivot de Gauss

voir cours...

IV) Application aux calculs de rang.

voir cours aussi...

V) Déterminants

A) Rapports Théoriques

a) Déterminant dans une base

b) Définition: $\mathcal{D}_B: \mathcal{L}(E) \rightarrow K$. $\mathcal{D}_B(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)}$, avec $\epsilon: S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ défini.

c) Propriétés: \mathcal{D}_B est une forme n -linéaire alternée non nulle.

d) Théorème: Soit \mathcal{B} une base de E formée de vecteurs unitaires alternés; c'est la droite vectorielle (K, \mathcal{D}_B) . $\mathcal{D}_B(e_1, \dots, e_n) = 1$.

e) Théorème: Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{D}_B(e_1, \dots, e_n)$. $\mathcal{D}_{\mathcal{B}'} = \mathcal{D}_B(B) \cdot \mathcal{D}_B$.

f) Déterminant d'un endomorphisme:

g) Définition: $\det u = \mathcal{D}_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$ ne dépend pas de la base choisie.

h) Propriétés: $\det(u \circ v) = \det u \cdot \det v$. $u \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det(u^{-1}) = \frac{1}{\det u}$. $\det(1_E) = 1$.

i) Déterminant d'une matrice carrée

j) Définition: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, $A = (a_{ij})$, $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1, \sigma(1)} \dots a_{n, \sigma(n)}$.

k) Propriétés: Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors $\det A = \det u$. $A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$.

l) Théorème: $\det AB = \det A \cdot \det B$. $\det I_n = 1$.

B) Calcul pratique

a) Développement suivant une rangée: $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}$, avec A_{ij} cofacteur de a_{ij} . $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \left(\begin{smallmatrix} A \\ \hline \end{smallmatrix} \right)$.

b) Calcul par blocs: Soit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$ avec A_1, A_2, A_3 carrés. Alors $\det A = \det A_1 \cdot \det A_3$.

c) Utilisation des opérations élémentaires: $\det(T_{ij}(x).A) = \det A$. On cherche à triangulariser la matrice.

C) Quelques déterminants classiques

a) Van der Monde: $D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$, et donc $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \iff$ les (a_i) sont deux à deux distincts.

b) Déterminant de Cauchy: $D = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \dots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \dots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \dots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{V(a_1, \dots, a_n) \cdot V(b_1, \dots, b_n)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (a_i + b_j)}$

c) Déterminant circulant: $D = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_1 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} = P(\zeta_1) \dots P(\zeta_{n-1})$, avec les (ζ_i) racines n -ièmes de l'unité et: $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$.

d) Déterminants trigonométriques: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos \theta & \dots & \cos^{n-1} \theta \\ \cos \theta & 1 & \dots & \cos^{n-2} \theta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos^{n-1} \theta & \cos^{n-2} \theta & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} \cdot \sin \theta$.

V) Systèmes Linéaires

A) Rapports Théoriques

- 1) Définition: (S): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rp}x_p = b_r \end{cases}$, n équations et p inconnues.
- * $A = (a_{ij})$ la matrice associée. $rg A = r$
 ** (S) est homogène ss (S): (S₀) avec $b_1 = \dots = b_n = 0$ nulle
 ... (S₀) est le syst homogène associé à (S)
 ... Un système est compatible s'il admet au moins une solution

2) Résolution de (S):

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}$ (S) $\Leftrightarrow AX = B$, ou (S) $\Leftrightarrow u(n) = b$, ou $A = [b_1, \dots, b_p]$ et $x_1c_1 + \dots + x_pc_p = B$.

3) Structure de l'ensemble des solutions:

a) Système homogène (S₀): L'ensemble des solutions est un sous-espace de K^p et de dim $(p-r)$. C'est $\text{Ker}(u)$, avec $r = rg(A)$.

b) Système compatible (S): L'ensemble des solutions est $(a + \text{Ker } u)$. C'est un sous-espace de dim $(p-r)$ et direction $\text{Ker}(u)$.

4) Méthode de Cramer

a) $n = p = r$ par définition. C'est équivalent à " A est carré inversible".

b) Théorème: Si (S) est un système de Cramer, il admet une solution unique.

c) Formule de Cramer: la solution (x_1, \dots, x_n) est donnée par: $x_j = \frac{\det(C_1, \dots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \dots, C_n)}{\det A}$

B) Résolution pratique des systèmes de Cramer

1) Systèmes triangulaires: (S): $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ \uparrow Remonte

2) Cas général:

a) Règle: se ramener au cas précédent en trouvant M , M inversible et MA triangulaire supérieure. Alors: $AX = B \Leftrightarrow (MA)X = MB$

b) Quotient par A/B: On réalise la méthode du pivot de Gauss sur $[A|B]$.

c) Remarque: Pour plusieurs systèmes, on fait $[A|B_1 - B_n]$

3) Méthode de Gauss-Jordan: On se ramène à une matrice diagonale au lieu d'une matrice triangulaire supérieure.

C) Cas général

1) De la même manière: On transforme $AX = B$ pour obtenir une matrice en échelon.

2) Résultat: (S) \Leftrightarrow (S') = $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r \\ 0 = b_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b_n \end{cases}$

* $(n-r)$ conditions de compatibilité: $b_{r+1} = 0, \dots, b_n = 0$
 .. On peut calculer x_1, \dots, x_r en fonction des autres inconnues.

VII) Inversion des matrices

1) Comatrice: C'est la matrice des cofacteurs. Théorème: $A^{-1} \text{Com}(A) = {}^t \text{Com}(A). A = \det A \cdot \text{Im}$.

* Gradiente: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t \text{Com} A$

2) Cas particuliers: Si $A = I + N$, avec N nilpotente ($N^p = 0$), alors $A^{-1} = (I + N)^{-1} = I - N + N^2 - N^3 + \dots + (-1)^{p-1} N^{p-1}$.

3) Polynôme annulateur: $P(A) = 0$, avec $P \in K[X]$, alors $a_p A^p + \dots + a_0 I_n = 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{a_0} (a_p A^{p-1} + \dots + a_1 I_n) \right] \times A = I_n$

4) Systèmes linéaires: On utilise le pivot de Gauss des systèmes linéaires: $[A | \begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}] = [A | I_n] \xrightarrow{A^{-1}} [I_n | A^{-1}]$

VIII) Applications à $SL(E)$ et $SL_n(K)$

1) Définition: $SL(E) = \{ u \in GL(E) / \det u = 1 \}$, C'est le groupe "spécial linéaire" de E . $SL(E) \simeq SL_n(K)$

2) Transvections

a) Définition: u est une transvection $\Leftrightarrow \begin{cases} rg(u - Id) = 1 \\ \det u = 1 \end{cases}$. Donc $\text{Ker}(u - Id) = H$ est un hyperplan de E avec $u(x) = x \forall x \in H$.

b) Caractérisation: u est une transvection $\Leftrightarrow \begin{cases} rg(u - Id) = 1 \\ \text{Im}(u - Id) \subset \text{Ker}(u - Id) \end{cases}$

c) Remarque: les matrices $T_{ij}(x)$ sont des transvections lorsque $x \neq 0$.

3) Théorèmes:

Th.1: $SL(E)$ est engendré par les transvections.

Th.2: $SL_n(K)$ est engendré par les $T_{ij}(x)$

⚠ Les $T_{ij}(x)$ ne sont pas toutes les transvections.