

① CV simple, CV uniforme

a) Notion de série de fonctions: Soit X un ensemble, et E un espace de Banach (à dimension finie ici). Soit $u_n: X \rightarrow E$, $x \mapsto u_n(x)$.

Alors: $\sum u_n(x)$, pour $x \in X$ est une série de fonctions.

b) Convergence simple: $\sum u_n(x)$ est simplement CV sur $X \Leftrightarrow \forall x \in X, \sum u_n(x)$ CV.

On déduit alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. Une autre traduction est: $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow \|S(x) - \sum_{k=0}^n u_k(x)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall x, \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$.

c) Convergence uniforme:

a/ Définition: $\sum u_n(x)$ CV uniformément sur $X \Leftrightarrow \sum u_n(x)$ CV simplement sur X , et S_n converge uniformément vers S .

b/ Traduction: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall x \in X, n \geq N \Rightarrow \|S(x) - S_n(x)\| \leq \varepsilon$, ou encore: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in X} \|S(x) - S_n(x)\| \leq \varepsilon$.

c/ Propriété: Une autre traduction est encore $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in X} \|R_n(x)\| \leq \varepsilon$.

Donc: $\sum u_n(x)$ UCV sur $X \Leftrightarrow$ elle CV simplement sur X et son reste converge uniformément vers 0 sur X .

d/ Exemples: la série géométrique ne CV pas unif sur $]-1, 1[$. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ UCV sur \mathbb{R} .

e) Critère de Cauchy uniforme: Dans E complet, $\sum u_n(x)$ avec $x \in X$ est UCV sur $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m > n \geq N \Rightarrow \forall x, \|u_{n+1}(x) + \dots + u_m(x)\| \leq \varepsilon$.

On remarque que pour E complet, S n'intervient pas. On en déduit aussi $\sum u_n(x)$ UCV sur $X \Leftrightarrow (u_n(x))$ UCV vers 0.

② CV normale

a) Démonstration de UCV: avec la définition, on utilise $S_n \Rightarrow S$ ou $R_n \Rightarrow 0$.

b) Convergence normale:

a/ Définition: Soit $\sum u_n(x)$ une série de fonctions pour $x \in X$. Soit $\mu_n = \sup_{x \in X} \|u_n(x)\| \in \mathbb{R}_+$.

Si $\mu_n \rightarrow 0$, alors: $\sum \mu_n$ CV $\Leftrightarrow \sum u_n(x)$ NCV sur X .

b/ Théorème: CV normale \Rightarrow CV uniforme + CV absolue.

c/ Variante: Si on trouve une série $\sum v_n$ positives majorante de $\sum \mu_n$, alors $\sum u_n(x)$ NCV.

d/ Exemples: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$ NCV sur \mathbb{R} . $\sum x^n$, pour $x \in \mathbb{C}$ et $|x| \leq a < 1$ est NCV sur $B'(0, a)$.

NCV \swarrow UCV \searrow SCV

e) Utilisation du critère spécial: Si pour $\sum u_n(x)$, le critère spécial est vérifié pour tout $x \in X$, alors $|R_n(x)| \leq |M_n(x)|$.

Donc, si (M_n) UCV vers 0, $\sum u_n(x)$ UCV.

③ Les Théorèmes

a) Théorème de continuité: X métrique et $a \in X$. $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n(x) \text{ UCV sur } X \\ \forall n, u_n \text{ C}^0 \text{ sur } X \text{ et } a \end{array} \right\} \Rightarrow S \text{ est C}^0 \text{ en } a$. De même pour X tout entier.

b) Théorème du passage à la limite terme à terme: X métrique, $A \subset X, a \in \bar{A}$. $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n(x) \text{ UCV sur } A \\ \forall n, \exists l_n, \exists l_n = \lim_{x \rightarrow a} u_n(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \sum l_n$ CV, de somme L , et $L = \lim_{n \rightarrow \infty} S(x)$.

En d'autres termes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k(x) = \sum_{k=0}^n \lim_{x \rightarrow a} u_k(x)$.

c) Théorème d'intégration terme à terme sur un segment:

Théorème 1: $X = [a, b]$, $\left\{ \begin{array}{l} \forall n, u_n \text{ C}^0 \text{ sur } [a, b] \\ \sum u_n(x) \text{ UCV sur } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow S \text{ est C}^0 \text{ sur } [a, b] \text{ et } \int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$.

Théorème 2: $X = [a, b]$, $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n(x) \text{ UCV sur } [a, b] \\ \forall n, u_n \text{ qpm et S qpm} \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$.

d) Théorème de dérivation ou primitivation terme à terme: $X = I$, intervalle de \mathbb{R} . $a \in I$.

$\left\{ \begin{array}{l} \forall n, u_n \text{ est C}^1 \text{ sur } I \\ \sum u_n'(x) \text{ SCV sur } I, \text{ de somme } T(x) \\ \text{la CV est stant sur les segments de } I \\ \sum u_n(a) \text{ CV} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum u_n(x) \text{ CV sur } I, \text{ et la CV est} \\ \text{uniforme sur les segments de } I \\ S \text{ est C}^1 \text{ sur } I, \text{ et } S'(x) = T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \end{array} \right.$

e) Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle qcy

a/ Fonctions réelles positives

Théorème: $X = I$, intervalle de \mathbb{R} .

$\left\{ \begin{array}{l} \forall n, u_n(x) \text{ est qpm et int}^{\text{ble}} \text{ sur } I \\ \forall n, u_n(x) \geq 0 \\ \sum u_n(x) \text{ SCV sur } I, \text{ et S qpm} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \text{ int}^{\text{ble}} \text{ sur } I \Leftrightarrow \int_I S \text{ CV} \\ \text{dans ce cas, on a: } \int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \end{array} \right.$

b/ Fonctions complexes

Théorème: $X = I$, intervalle de \mathbb{R} . $u_n(x) \in E = \mathbb{C}$.

$\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n(x) \text{ SCV sur } I, \text{ de somme } S \text{ qpm} \\ \forall n, u_n \text{ qpm et int}^{\text{ble}} \text{ sur } I \\ \sum \int_I |u_n| \text{ CV} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S \text{ int}^{\text{ble}} \text{ sur } I, \text{ et } \int_I S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I u_n \end{array} \right.$

④ Exemples

1) Fonction γ : $\forall x \in]1, +\infty[$, $\gamma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. On montre que γ est C^∞ sur $]1, +\infty[$.

On montre aussi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 1$.

2) Sinus: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, est C^1 avec $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$.

3) Fonction Γ : $-\ln \Gamma(x) = \gamma x + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$ et $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x/n} \right]$ d'après Weierstrass.

$-\Gamma'(x) = \gamma + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right)$ Donc $\Gamma'(1) = -\gamma \Leftrightarrow \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\gamma$. Remarque: Γ est convexe