

Formulation variationnelle des problèmes aux limites elliptiques

I Formulation variationnelle

Soit $(\mathcal{P}) \begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Pour toute $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, $\int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx$
 $v(0) = v(1) = 0$

Soit $V = \{v \in H^1(I) \mid v(0) = v(1) = 0\} = H_0^1(I)$. Alors pour $u, v \in V$, l'égalité précédente a un sens.

DEF : On dit que u est solution faible de (\mathcal{P}) si u vérifie $(Q) \begin{cases} u \in H_0^1(I) \\ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 f v, \forall v \in H_0^1(I) \end{cases}$
 On dit que (Q) est la formulation variationnelle de (\mathcal{P}) .

II Résultats abstraits

On se donne : $\begin{cases} - V \text{ espace de Hilbert de norme } \|\cdot\| \\ - a: V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ une forme bilinéaire que l'on suppose } \begin{cases} \text{continue} \rightarrow \exists M > 0, \forall u, v \in V, |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \\ \text{V-elliptique} \rightarrow \exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \end{cases} \\ - L: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ une forme linéaire continue} \end{cases}$

On définit alors le problème : $(Q) \begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{cases}$, est appelé "problème variationnel abstrait".

Théorème de Lax-Hilgrom : Sous ces mêmes hypothèses, le problème (Q) admet une unique solution.
 Si de plus "a" est symétrique, alors "a" définit un nouveau produit scalaire.

Théorème : On suppose de plus que la forme bilinéaire "a" est symétrique.

Alors :

$$\left[u \text{ solution de } \begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = L(v), \forall v \in V \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[u \text{ solution de } \begin{cases} u \in V \\ \sigma(u) = \inf_{v \in V} \mathcal{J}(v) \end{cases} \text{ avec } \mathcal{J}(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \right]$$

III Exemples de problèmes aux limites

1) Exemple 1

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u'' + u = f & \text{sur } I =]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (Q) \begin{cases} u \in V \\ \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \forall v \in V \end{cases} \text{ avec } V = H_0^1(I).$$

$$\begin{cases} a(u, v) = \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx, \text{ forme bilinéaire symétrique.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a(u, v)| \leq \|u\|_{H_1} \cdot \|v\|_{H_1} & \text{continue} \\ a(v, v) = \|v\|_{H_1}^2 & \text{V-elliptique} \end{cases}$$

$$\begin{cases} L(v) = \int_0^1 f v dx, \text{ forme linéaire.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|L(v)\| \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \cdot \|v\|_{H_1}, \text{ pour } f \in L^2(I)! \text{ donc } L \text{ est } C^0. \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Hilgrom nous assure que la solution u existe et est unique.

Interprétation : $H_0^1(I) = \mathcal{C}_c^\infty(I)$, donc :

$$u \text{ sol. de } (Q) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in V \\ \int_0^1 u'v' + \int_0^1 uv = \int_0^1 f v, \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in V \\ \int_0^1 u'v' = \int_0^1 (f - u) \cdot v dx, \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u \in V \\ u' \in H^1(I) \text{ et } (u')' = -(f - u) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1(I) \\ -u'' + u = f \text{ (dans } L^1(I)) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

2) Exemple 2

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans }]0,1[= \mathbb{I} \text{ et } f \in L^2(\mathbb{I}) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (\mathcal{Q}) \begin{cases} u \in V = H^1_0(\mathbb{I}), \quad u'(0) = u'(1) = 0 \\ \int_0^1 u'v' dx + \int_0^1 uv dx = \int_0^1 f v dx, \quad \forall v \in H^1_0(\mathbb{I}) \end{cases}$$

Existence et unicité par le Théorème de Lax - Milgram.

Interprétation: un sol. de $(\mathcal{Q}) \Leftrightarrow \begin{cases} u \in H^1_0(\mathbb{I}) \\ -u'' + u = f \text{ dans } L^2(\mathbb{I}) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$

Remarque: 2 types de condition aux limites : $\begin{cases} - \text{celles contenues dans la définition de } V \\ - \text{celle que l'on trouve par IPP} \end{cases}$
