

II Tribu

1) Définition: Une tribu \mathcal{T} , ou σ -algèbre, définie sur X qsq est un ens. de parties de X tq:

$$\begin{cases} (i) \emptyset \in \mathcal{T} \text{ et } X \in \mathcal{T} \\ (ii) A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \\ (iii) \forall A_n, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{T} \end{cases} \quad \begin{cases} (i) \emptyset \in \mathcal{T} \text{ et } X \in \mathcal{T} \\ (ii) A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \\ (iii) \forall A_n, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_n A_n \in \mathcal{T} \end{cases} \quad \begin{cases} (i) \emptyset \in \mathcal{T} \text{ et } A \in \mathcal{T} \\ (ii) A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T} \\ (iii) \forall m, A_n \in \mathcal{T} \text{ et } m+n, A_m \cap A_n = \emptyset \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{T} \\ (iii) A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{T} \end{cases}$$

Propriété: Une tribu est stable par \cap , \cup et \setminus , finie ou dénombrable.

2) Relation d'ordre

Définition: Soit deux tribus \mathcal{T} et η sur X . \mathcal{T} est \sup fine que $\eta \Leftrightarrow \mathcal{T} > \eta \Leftrightarrow (\forall A \in \eta \Rightarrow A \in \mathcal{T})$.

Définition: Soient $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ tribus de X . $\bigcap_i \mathcal{T}_i = \{A \in X \mid A \in \mathcal{T}_i, \forall i \in I\}$

Théorème: $\bigcap_i \mathcal{T}_i$ est une tribu.

Proposition: Soient $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ tribus sur X . $\forall \mathcal{T}$ tribu telle que $(\forall i, \mathcal{T} < \mathcal{T}_i)$, alors $(\mathcal{T} < \bigcap_i \mathcal{T}_i)$.

Définition: Soit \mathcal{P} un ens. de parties de X . On définit $\mathcal{T}_{\mathcal{P}} = \bigcap_{\mathcal{T} \text{ tribu}} \mathcal{T}$
 $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ est la tribu la moins fine contenant les $A \in \mathcal{P}$. $\forall A \in \mathcal{P}, A \in \mathcal{T}_{\mathcal{P}}$

Définition: Soit $X = \mathbb{R}$ et $\mathcal{Y} = \{[a, b] \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. On définit la tribu Borelienne de \mathbb{R} : $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}_{\mathcal{Y}}$

Propriété: $\forall a, b \in \mathbb{R}, [a, b] \in \mathcal{B}$ et $[a, b] \in \mathcal{B}$ et $\{a\} \in \mathcal{B}$. De même, $Q \in \mathcal{B}$, $Q^c \in \mathcal{B}$. Tout ouvert $\in \mathcal{B}$, etc...

Remarque: On ne peut pas "construire" une tribu par réunion, \cap , et \cap dénombrables. C'est FAUX.

.. K , l'ensemble de Cantor possède la puissance du continu, est de mesure nulle, et dans \mathcal{B} .

3) Tribus et applications

a) Tribu image: Soit (X, \mathcal{T}) et Y qsq. Soit $f: X \rightarrow Y$. Alors $\eta = f(\mathcal{T}) = \{B \in Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{T}\}$ est une tribu sur Y .

Exemple: Si f est l'cte, alors $f(\mathcal{B}) = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tribu discrète.

Théorème: Soit $f: X \rightarrow Y$, et $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ tribus sur X . Alors: $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2 \Rightarrow f(\mathcal{T}_1) > f(\mathcal{T}_2)$.

Théorème: Les ouverts de \mathbb{R} engendrent la Borelienne.

Corollaire: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f(\mathcal{B}) > \mathcal{B}$.

b) Image réciproque: Soit $f: X \rightarrow (Y, \eta)$. L'image réciproque de η par f est $f^{-1}(\eta) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \eta\}$.

Théorème: $\eta_1 < \eta_2 \Rightarrow f^{-1}(\eta_1) < f^{-1}(\eta_2)$

Théorème: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, alors $f^{-1}(\mathcal{B}) < \mathcal{B}$.

4) Applications mesurables

Définition: Soit $f: (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \eta)$. f mesurable $\Leftrightarrow \forall B \in \eta, f^{-1}(B) \in \mathcal{T} \Leftrightarrow f^{-1}(\eta) < \mathcal{T}$.

Théorème: Soit (X, \mathcal{T}) et (Y, η) et $f: X \rightarrow Y$. Soit \mathcal{C} un ens. de parties de Y tel que $\mathcal{C}_{\mathcal{C}} = \eta$.

Alors: f mesurable $\Leftrightarrow \forall C \in \mathcal{C}, f^{-1}(C) \in \mathcal{T}$.

Application: Toute fonction continue de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ car $f^{-1}(u)$ est un ouvert $\in \mathcal{B}$.

III Mesure

1) Définition: μ est une mesure sur (X, \mathcal{T}) , et on dit que (X, \mathcal{T}, μ) est un espace mesuré, Msi $\mu: \mathcal{T} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ est telle que:

$$\begin{cases} (i) \mu(\emptyset) = 0 \\ (ii) \forall A_n \in \mathcal{T}, A_n \cap A_m = \emptyset, \text{ alors } \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n). \end{cases} \quad (\text{convergente ou } \infty \text{ vers } +\infty)$$

exemple: la mesure de Dirac, $\delta_a: A \in \mathcal{T} \mapsto \delta_a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin A \\ 1 & \text{si } a \in A \end{cases}$

2) Théorèmes et propriétés

a) Théorème (Lebesgue-Carathéodory): Il existe une unique mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, notée "dx", telle que $dx([a, b]) = b - a$.

b) Propriétés: Soit (X, \mathcal{T}, μ) espace mesuré. Soit $A, B, A_n \in \mathcal{T}$.

$$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) \\ \dots A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) \\ \dots \mu(A \cap B) \text{ fini} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \\ \dots A_n \supset A \Rightarrow \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) \\ \dots A_n \subset A \text{ et } \mu(A_n) \text{ fini} \Rightarrow \mu\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_n \mu(A_n) \end{cases}$$

Remarque: $\mu(A)$ fini est important, car $\bigcap_n [1, n] = \emptyset$, donc $\mu(\bigcap_n A_n) = 0$, mais $\lim_n \mu(A_n) = +\infty$!

3) Image d'une mesure: Soit $f: (X, \mathcal{E}, \mu) \rightarrow (Y, \eta)$, on note $f^* \mu$ la mesure image: $\begin{cases} \eta \rightarrow \mu_0 \\ B \mapsto f^* \mu(B) = \mu(f^{-1}(B)) \end{cases}$
Exemple: Pour $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f^* \mu(B) = \mu(B)$ si $x \in B$, $= 0$ si $x \notin B$.

4) Espace des fonctions mesurables

Stabilité: Soient (X, \mathcal{E}) et $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurables. Soit f et g mesurables, et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f+g \text{ mesurable} \\ \lambda f \text{ mesurable} \\ \lambda f \text{ mesurable} \\ f/g \text{ mesurable si } f \neq 0 \\ h \circ f \text{ mesurable, } \forall h \text{ mesur. } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

5) Limites

Définition: Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\limsup(a_n) = \overline{\lim}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} (a_k)$
 $\liminf(a_n) = \underline{\lim}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} (a_k)$

Théorème: $\lim a_n = l \iff \limsup a_n = \liminf a_n = l$

Théorème: Soit (X, \mathcal{E}) et $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurables. Alors:

$$\begin{cases} (f_n) \text{ mesurables de } X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \sup f_n: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable.} \\ (f_n) \text{ mesurables de } X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \inf f_n \text{ mesurable.} \\ (f_n) \text{ mesurables de } X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \limsup f_n \text{ et } \liminf f_n \text{ mesurables.} \\ \lim f_n = f \iff f \text{ mesurable.} \end{cases}$$

Corollaire: Si $f: (X, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mesurable alors $f_+ = \sup(f, 0)$ et $f_- = -\inf(f, 0) \geq 0$ et $|f| = f_+ + f_-$ sont mesurables.

6) Approximation

Définition: Soit $f: (X, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. f étagée ou $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R}) \iff f$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Théorème: Soit $f \in \mathcal{E}(X, \mathbb{R})$ avec b_1, \dots, b_n les valeurs de f . f mesurable $\iff \forall i \leq n, f^{-1}(\{b_i\}) \in \mathcal{E}$.

Théorème: f étagée et mesurable $\iff \exists (a_i) \in \mathbb{R}^n, \exists (A_i) \in \mathcal{E}^n$ tq $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$

Théorème: Soit f mesurable ≥ 0 , $f: (X, \mathcal{E}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Alors $\exists (f_n)$ tq $\forall n, f_n$ étagée mesurable ≥ 0 avec $(f_n) \uparrow$ et $\lim f_n = f$.

III) Intégration

1) Fonctions de \mathcal{E}_+

Définition: $\mathcal{E}_+(X) = \{f^0 \text{ étagées mesurables positives}\}$

$\begin{cases} f \in \mathcal{E}_+(X) \iff f(n) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}, \text{ avec } a_i \in \mathbb{R}_+, A_i \in \mathcal{E} \text{ et } \bigcup_{i=1}^n A_i = X \\ \int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ Construction: $\infty \cdot 0 = 0$.

Théorème: Soient $f, g \in \mathcal{E}_+$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors $\int (f+\lambda g) d\mu = \int f d\mu + \lambda \int g d\mu$, et $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$.

Théorème: Soit $(f_n) \in \mathcal{E}_+$, $(f_n) \uparrow (f_n \geq f_{n-1})$, et $g \in \mathcal{E}_+$ tq $g \leq \lim f_n \implies \int g d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$.

2) Fonctions de $\mathcal{M}_+(X)$: fonctions mesurables positives.

Intégrale: On définit l'intégrale de $f \in \mathcal{M}_+(X)$: $\int_X f d\mu = \lim \int_X f_n d\mu$, avec $\lim f_n = f$ et $f_n \in \mathcal{E}_+$. Cette définition est bien cohérente.

Propriétés: $\forall f, g \in \mathcal{M}_+(X), \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$, $\int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu$, et $\int f d\mu \leq \int g d\mu$ si $f \leq g$.

3) Théorème: "Convergence monotone positive"

$\forall n, f_n \in \mathcal{M}_+(X)$ et $\lim f_n = f \implies \lim \int f_n d\mu = \int f d\mu = \int \lim f_n d\mu$.

3) Fonction de $\mathcal{I}_+(X, \mathcal{E}, \mu)$: fonctions intégrales positives

Définition: $f \in \mathcal{I}_+(X, \mathcal{E}, \mu) \iff f \in \mathcal{M}_+(X, \mathcal{E})$ et $\int f d\mu < +\infty$

Remarque: $\forall f, g \in \mathcal{I}_+, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, (f+g) \in \mathcal{I}_+$ et $(\lambda f) \in \mathcal{I}_+$

4) Fonction mesurable quelconque

Définition: Soit $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{E}, \mu)$. $f \in \mathcal{Z}^+(X, \mathcal{E}, \mu) \iff f_+ \in \mathcal{I}_+(X, \mathcal{E}, \mu)$ et $f_- \in \mathcal{I}_+(X, \mathcal{E}, \mu)$

Définition: Soit $f \in \mathcal{Z}^+(X, \mathcal{E}, \mu)$, on définit l'intégrale $\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu$.

5) Théorème

$\begin{cases} (i) \mathcal{Z}^+ \text{ est un } \mathcal{E} \\ (ii) f, g \in \mathcal{Z}^+ \text{ alors } \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \\ (iii) \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathcal{Z}^+, \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu \\ (iv) \forall f, g \in \mathcal{Z}^+, f \leq g \implies \int f d\mu \leq \int g d\mu \\ (v) \int |f| d\mu \leq \int |f| d\mu \text{ pour } f \in \mathcal{Z}^+ \end{cases}$ $\Delta f \in \mathcal{Z}^+ \iff |f| \in \mathcal{Z}^+$

Proposition: Soient $f, g \in \mathcal{M}$, alors: $|f| \leq |g|$ et $g \in \mathcal{Z}^+ \implies f \in \mathcal{Z}^+$.

5) Théorème de Lebesgue

Rappel: f^0 positives $\forall n, f_n \geq 0$ mesurables, $(f_n) \uparrow, \lim f_n = f \implies \begin{cases} \int f d\mu \text{ existe } \in \mathbb{R}_+, \int f d\mu = \lim \int f_n d\mu \\ \text{si } \lim \int f_n d\mu < +\infty \text{ alors } f \in \mathcal{Z}_+ \end{cases}$

- Théorème 1: \int intégrables \forall f_n f_n intégrables, $(f_n) \downarrow$, $\lim f_n = f \Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$ et $< \infty \Leftrightarrow \int$ int^{ble}
- Leurre Fubini: positives $\forall n, f_n$ mesurables $\geq 0 \Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$ $\int \lim f_n = \lim \int f_n$
- Théorème Fubini: intégrables $\exists g$ int^{ble} $h, g \in f_n \Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$
 $\exists g$ int^{ble} $h, f_n \in g \Rightarrow \int \lim f_n = \lim \int f_n$
- Théorème CN dominée: $\lim f_n = f, \forall n, f_n$ mesurables, $\exists g$ int^{ble} $h, |f_n| \leq g \Rightarrow \lim \int f_n = \int f$

IV Fonctions définies par des intégrales.

- 1) Continuité: on considère $f(x,y), x \in \Omega$ ouvert de \mathbb{R}^d et $y \in (X, \mathcal{B}, \mu)$.
 a/ Théorème: $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, y \mapsto f(x,y) \text{ est dp int}^{\text{ble}} \\ \forall y \in Y, x \mapsto f(x,y) \text{ est continue "presque partout" en } x_0 \\ \exists g(y) \text{ int}^{\text{ble}} \text{ pour la mesure } \mu, h, \forall x \in \Omega, |f(x,y)| \leq g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = \int_Y f(x,y) d\mu \text{ est } C^0 \text{ en } x_0$
 is: $\lim_{x \rightarrow x_0} \int_Y f(x,y) d\mu = \int_Y \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) d\mu$
 b/ Exemple: Soit $f(x)$ int^{ble} sur \mathbb{R}_n^d pour $dx_1 \dots dx_n$. On définit $\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n^d} e^{i y \cdot x} f(x) dx, y \in \mathbb{R}_n^d$
 $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_n^d, d\mu) \Rightarrow \hat{f}(y)$ est définie et C^0 pour $y \in \mathbb{R}_n^d$.

2) Différentiabilité

- a/ Théorème: $\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega, y \mapsto f(x,y) \text{ est dp int}^{\text{ble}} \\ \text{presque partout en } y, x \mapsto f(x,y) \text{ admet des dérivées partielles en } x_0: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) \\ \exists g(y) \text{ int}^{\text{ble}} \text{ pour la mesure } \mu, h, \forall x \in \Omega, \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} \right| \leq g(y) \end{array} \right\} \Rightarrow F(x) = \int_Y f(x,y) d\mu \text{ est diff}^{\text{ble}} \text{ en } x_0$
 $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) = \int_Y \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y) d\mu$
 b/ Exemple: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_n^d)$ et $\|f\| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_n^d) \Rightarrow \hat{f}(y)$ différentiable et $\frac{\partial \hat{f}}{\partial y_i}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}_n^d} i x_i e^{i y \cdot x} f(x) dx$
 $\hat{e}^{i y \cdot x} = e^{i y \cdot x}$
 $\int_{\mathbb{R}} e^{i x} dx = \text{Dirac}$

V $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$

- 1) Définition et propriétés
 a. Proposition: $f = g$ p.p. $\Rightarrow \int f d\mu = \int g d\mu$
 b. Proposition: $f \geq 0$ et $\int f d\mu = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p.
 c. Définition: On définit $L^1(X, \mathcal{B}, \mu) = \mathcal{L}^1 / \sim$, avec $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ p.p.
 d. Théorème: $\forall f, g \in L^1$ et $\lambda \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \\ \int \lambda f d\mu = \lambda \int f d\mu \\ |\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu \\ f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu \end{array} \right.$
 Remarque: $f \in L^1, g \in L^1 \nRightarrow f \cdot g \in L^1$

2) Ev Normé

- a. Théorème: $\|f\|_1 = \int |f| d\mu$ est une norme sur $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.
- b. Théorème: $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.
- c. Proposition: $f_n \xrightarrow{p.p.} f$ et $|f_n| \leq g$ int^{ble} $\Rightarrow f_n \xrightarrow{L^1} f$ (is: $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$)
- d. Théorème: $f_n \xrightarrow{L^1} f \nRightarrow f_n \xrightarrow{p.p.} f$
 $f_n \xrightarrow{L^1} f \Rightarrow \exists \varphi, f_n(\omega) \xrightarrow{p.p.} f(\omega)$

VI Mesure produit et Changement de variable

- 1) Mesure produit
 a/ Définition: Soit (X, \mathcal{B}, μ) et (Y, \mathcal{C}, ν) . Le produit tensoriel des tribus $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ et ν : $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} = \mathcal{B}_S$, avec $S = \{A \times B, A \in \mathcal{B}, B \in \mathcal{C}\}$ est une tribu sur $X \times Y$.
 b/ Mesure sur $(X \times Y, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C})$: On prend la mesure $\forall C \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \Delta(C) = \iint \chi_C(x,y) d\mu d\nu = \iint \chi_C(x,y) d\mu d\nu = d\mu d\nu(C)$
 c/ Théorème Fubini: Si f est ≥ 0 mesurable pour $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$, alors $\int_{X \times Y} f(x,y) d\mu d\nu = \int_X \int_Y f(x,y) d\nu d\mu = \int_Y \int_X f(x,y) d\mu d\nu$
 Si f est qq et $d\mu d\nu$ int^{ble}, alors on peut inverser les intégrales.

2) Changement de variable

- a. Théorème: Soit $\varphi: \omega \mapsto x$ une bijection bi-difféable, avec $\det |D\varphi(\omega)| \neq 0$ et $\det |D\varphi(x)| \neq 0$
 Alors: $\forall f(x)$ int^{ble} sur Ω pour $dx_1 \dots dx_d$, on a: $\int_{\Omega} f(x) dx_1 \dots dx_d = \int_{\omega} f(\varphi(\omega)) |\det D\varphi(\omega)| d\omega_1 \dots d\omega_d$

- Exemple : $\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy$
- .. $T(A) = \int_0^A e^{-t} t^{k-1} dt$, sur $]0, +\infty[$. $T(u) = (u-1)!$ $S_{k-1}(u) = \frac{d}{du} \frac{u^{k-1}}{\Gamma(\frac{k-1}{2}+1)}$ et $V_k(u) = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma(\frac{k}{2}+1)}$

VII $L^\infty(X, \mathcal{G}, \mu)$

1) Définition et propriétés

- Définition :** $L^\infty(X, \mathcal{G}, \mu) = \{ f \text{ essentiellement bornée} \} = \{ f \mid f \text{ mesurable et } \exists A \in \mathcal{G} \text{ et } \exists C \text{ tq } \mu(A) > 0 \text{ et } |f| < C \text{ sur } A \}$
- Remarque :** L^∞ est un c.v.
- Définition :** $L^\infty = L^\infty / \sim$ avec $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ p.p. $\|f\|_{L^\infty} = \inf \{ C \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > C\}) = 0 \}$

2) Propriétés

- Proposition :** $f \sim g \Rightarrow \|f\|_{L^\infty} = \|g\|_{L^\infty}$.
- Théorème :** $(L^\infty, \|\cdot\|_{L^\infty})$ est complet.
- Théorème :** $\forall f \in L^1, \forall g \in L^\infty \Rightarrow (f \cdot g) \in L^1$ et $\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \times \|g\|_{L^\infty}$.
- Remarque :** $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} (1 + \infty \times \chi_{\{f \neq 0\}})$ pour $f \in L^\infty$ et $\chi_{\{f \neq 0\}} = \chi_{\{x \mid |f(x)| > 0\}}$

VIII Convolution

1) Définition

- a) Définition :** Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d, dx)$. Alors $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \in L^1$.
- b) Théorème :** $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$.
- c) Remarque :** Convolution régularise, i.e. $f * g$ est continue !

2) Convolution et Transformation de Fourier

- a) Propriété :** $\forall f \in L^1, \hat{f} \in L^\infty$ car $|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1}$.
- b) Appl. linéaire :** L'application $\mathcal{F} : f \in L^1 \mapsto \hat{f} \in L^\infty$ est linéaire continue, avec $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1}$ donc $\|\mathcal{F}\| = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}$.
- c) Théorème :** Soit $f, g \in L^1$, alors $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi)$.

3) Convolution de Gaussienne

- Propriété :** Soit $G_{a,\alpha}(x) = a \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2\alpha}}$, $\alpha > 0$. Alors $\widehat{G_{a,\alpha}}(\xi) = a \cdot \alpha^{d/2} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} \xi^2}$.
- Propriété :** $G_{a,\alpha} * G_{b,\beta}(x) = ab \left(\frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta} \right)^{d/2} \cdot e^{-\frac{\|x\|^2}{2(\alpha+\beta)}}$.

4) Fourier et dérivation

- Théorème :**
 - $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f}(\xi)$ continue
 - $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\|x\| f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}(\xi)$ dérivable et $\frac{\partial}{\partial \xi_k} \hat{f}(\xi) = -i \cdot x_k \cdot \hat{f}(\xi)$
 - $\dots \|x\|^2 f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \hat{f}(\xi)$ deux fois dérivable et $\Delta_\xi \hat{f} = -\|x\|^2 \hat{f}(\xi)$
 - $\dots \widehat{\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f}(\xi) = -i \cdot \xi_k \cdot \hat{f}(\xi)$.