

I) Divers modes de CV des suites de fonctionsa) Convergence uniforme:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ .b) Convergence en moyenne:a/ Définition: Soit  $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , cpm et int<sup>ble</sup> sur  $I$ . Soit  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ , cpm et int<sup>ble</sup> sur  $I$ . $(f_n)$  CV en moyenne vers  $f$  sur  $I \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / n \geq N \Rightarrow \int_I |f_n - f| \leq \varepsilon$ .b/ Conséquence: Si  $(f_n)$  CV en moyenne vers  $f$  sur  $I$ , alors:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f$ .c/ Insensibilité: Ce n'est pas une CV au sens d'une norme, car plusieurs fonctions non nulles CV en moyenne vers 0.d/ Restriction à  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ : On se limite à  $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ , l'esp des applications continues de  $I \rightarrow \mathbb{K}$ , intégrables sur  $I$ . Alors, on peut utiliser la norme  $N_1(f) = \int_I |f|$ . La CV en moyenne devient une convergence de norme  $N_1$ .3) Convergence en moyenne quadratique:a/ Définition: Soit  $f_n: I \rightarrow \mathbb{K}$  et  $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ , toutes de carré intégrable, et cpm. Alors: $(f_n)$  CVMQ vers  $f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I |f_n - f|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N / n \geq N \Rightarrow \int_I |f_n - f|^2 \leq \varepsilon$ .b/ Insensibilité: Dans l'esp des  $f^2$  cpm, ce n'est pas une CV au sens d'une norme.c/ Restriction à  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ : On se limite à  $\mathcal{L}^2(I, \mathbb{K})$ , l'esp des applications continues de carré int<sup>ble</sup> sur  $I$ . Alors  $N_2(f) = \left( \int_I |f|^2 \right)^{1/2}$  devient une norme, et la CVMQ devient la CV de norme  $N_2$ .4) Cas où  $I$  est borné: Soit  $I$  borné, de longueur  $h = |b-a|$ .a/ Propriété: Pour  $I$  borné, la UCV entraîne les deux CVM et CVMQ.b/ Propriété: Pour  $I$  borné, la CVMQ entraîne la CVM.5) Exemples: •  $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  sur  $\mathbb{R}^+$ . Mais pas de CVM, en revanche il y a CVMQ. Dans cet exemple: CVMQ  $\nleftrightarrow$  CVM car  $\mathbb{R}^+$  non borné.  
•  $f_n(x) = \frac{1}{n} e^{-\frac{x}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  UCV vers 0 sur  $\mathbb{R}^+$ , mais UCV  $\nleftrightarrow$  CVMQ ici!6) Exemple utile: Soit  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ , cpm, et  $S$  une subdivision adaptée à  $f$ .Soit  $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $C^0$ , et s'annulant uniquement en  $a_0, \dots, a_p$  de  $S$ .  $\varphi(n) = \prod_{i=0}^p (x - a_i)^2$ .Soit  $f_n = \frac{n \varphi f}{1 + n \varphi}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Alors:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Chaque } f_n \text{ est } C^0 \text{ sur } [a, b]. \\ (f_n) \text{ CVM et CVMQ vers } f \text{ sur } [a, b]. \end{array} \right.$ II) Théorie de CV monotone1) Théorème: Soit  $(f_n)$  de  $I \rightarrow \mathbb{R}$ , cpm et int<sup>bles</sup> sur  $I$ . On suppose  $(f_n)^+$ , i.e.  $f_n \geq 0$ , et  $(f_n)$  SCV vers  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $I$ , cpm.Alors:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ou bien } (\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée, et } f \text{ int}^{\text{ble}} \text{ sur } I \text{ avec } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n = \int_I f. \\ \text{ou bien } (\int_I f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est NON majorée, et } f \text{ NON int}^{\text{ble}} \text{ sur } I. \end{array} \right.$ 2) Remarque: On se rappelle que lorsque les  $f_n$  et  $f$  sont continus, la convergence simple et monotone entraîne la UCV sur tout segment.3) Exemple: La fonction  $\varphi: ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$ . On a montré que  $\varphi$  est  $C^0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ .  
On montre que  $(\varphi - 1)$  est int<sup>ble</sup> sur  $]x_0, +\infty[$  si  $x_0 > 1$ .  
Dans ce cas:  $\int_{x_0}^{+\infty} (\varphi(x) - 1) dx = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{x_0}^{+\infty} \frac{1}{x^n} dx$ .III) Théorie de CV dominée1) Théorème: Soit  $(f_n)$  cpm et int<sup>bles</sup> sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose:  $\left\{ \begin{array}{l} (f_n) \text{ SCV vers } f: I \rightarrow \mathbb{K}, \text{ cpm sur } I. \\ \exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^+, \text{ cpm et int}^{\text{ble}} \text{ sur } I, \text{ tq } |f_n| \leq \varphi. \end{array} \right.$ Alors:  $f$  int<sup>ble</sup> et  $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$ .2) Exemples: On voit que  $\forall x > 0, (1 - \frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{x}{n})^n = e^{-x}$ . Donc l'intégrale de Gauss:  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .IV) Intégrales dépendant d'un paramètre1) Théorème de continuitéa/ Théorème: Soit  $X$  métrique,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f: X \times I \rightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On suppose:  $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ continue sur } X \times I \\ \exists \varphi: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ int}^{\text{ble}} \text{ sur } I / \forall x \in X, \forall t \in I, |f(x, t)| \leq \varphi(t) \end{array} \right.$   
Alors:  $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  est bien définie sur  $X$ , et est  $C^0$  sur  $X$ .b/ Exemples:  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  existe et est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .•  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  existe et est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .• Convolution:  $h = f * g$ , avec  $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ , cpm.  $h(x) = \int_0^b f(t) g(x-t) dt$ Si  $f \in C^0$  sur  $I \subset \mathbb{R}$  et int<sup>ble</sup> sur  $I$ , et que  $g$  est  $C^0$  et bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors  $h$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}$ .• Transformée de Fourier: Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  cpm et int<sup>ble</sup> sur  $\mathbb{R}$ . Alors on pose:  $Tf(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-itx} dt \in \mathbb{C}$ .2) Théorème de dérivation:a/ Théorème: Soit  $X$  et  $I$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f: X \times I \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant les hypothèses du Théorème de Continuité ( $f \in C^0$  sur  $X \times I$ , et  $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ ).Alors  $F: x \mapsto \int_I f(x, t) dt$  existe et est  $C^0$  sur  $X$ .On suppose que  $f$  admet une dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x}$  vérifiant les mêmes hypothèses ( $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0$  sur  $X \times I$ , et  $|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)| \leq \varphi(t)$ ).

b) Exemples : •  $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$  est  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $C^0$  sur  $\mathbb{R}^+$ .  $F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$ .

.. Convolution : Soit  $f, g \in K$  continue d'inté. sur  $I$ . Soit  $g: \mathbb{R} \rightarrow K$  continue et bornée.  $(f * g)' = f * g'$

... Transformée de Fourier : Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  continue et inté. sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $Tf(t)$  inté. sur  $\mathbb{R}$ .

Alors  $\widehat{f'}(x) = T\widehat{f'}(x) = (-it\widehat{f}(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} -it f(t) e^{-itx} dt$ .

3) Théorème d'intégration : Soit  $X = [a, b]$  et  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant les hypothèses du théorème de continuité.

Alors :  $F: x \mapsto \int_x^b f(t) dt$  est  $C^0$  sur  $X$ , et  $\int_a^b F(x) dx = \int_x \int_a^b f(t, x) dx \cdot dt$

## IV. Fonction $\Gamma$

1) Définition : On définit  $\Gamma: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . L'intégrale n'existe que pour  $x > 0$ .

2) Relation fonctionnelle :  $\forall x > 0$ ,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . On en déduit  $\Gamma(n+1) = n!$ .  $= \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$   
 On calcule aussi  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

3) Continuité :  $\Gamma$  est une intégrale dépendant d'un paramètre. On montre que  $\Gamma$  est  $C^0$  sur tout intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $\Gamma$  est  $C^0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  par p.p.t. locale de la continuité.

4) Dérivabilité : On montre que  $\Gamma$  est  $C^1$  par le théorème de dérivabilité, et même que  $\Gamma$  est  $C^\infty$ .

On remarque que  $\Gamma$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ . De même la  $\Gamma$  est aussi convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

5) Etude aux bornes : • en 0 ;  $\Gamma(x+1) \sim x\Gamma(x)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} x\Gamma(x) = \Gamma(1) = 1$ . D'où :  $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ .

• en  $+\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = +\infty$ , de plus,  $\frac{\Gamma(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$



6) Formule de Gauss :  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n(n+1)\dots(n+x)}$ .

7) Extensions : • Signalons que  $\int_0^{+\infty} t^{(n-1)/2} e^{-t} dt = \Gamma(n)$  est encore définie pour  $x \in \mathbb{C}$  pourvu que  $\text{Re}(x) > 0$ .

• On peut étendre  $\Gamma$  à  $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})^*$  en posant :

$$\begin{cases} x \in ]-1, 0[ , \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \\ x \in ]-2, -1[ , \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+2)}{x(x+1)} \\ \text{(iii)} \\ x \in ]-n, -n+1[ , \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+n)}{x(x+1)\dots(x+n-1)} \end{cases}$$
