

I. Définition

a) DEF: Soit $(a_n) \in K^{\mathbb{N}}$ ($K: \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$), et $x \in K$. La série $\sum a_n x^n$ est la série entière de variable x et de coefficients a_n .

b) Exemples:

- a/ $\sum x^n$: Pour $x \in \mathbb{C}$, et $\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} / |x| < 1\}$, alors $S: x \in \mathbb{D} \mapsto S(x) = \frac{1}{1-x}$ est continue sur \mathbb{D} . Et S est C^∞ sur $x \in]-1, 1[$.
 b/ (a_n) nulle à part: alors c'est un polynôme.
 c/ $\sum n! x^n$: est $\mathbb{D}V$.

II. Etude de la convergence; rayon de CV

a) Lemme d'Abel: Soit $\sum a_n x^n$, et $x_0 \in K$ tq $x_0 \neq 0$ et $(a_n x_0^n)$ bornée. Alors la série est ACV pour x tq $|x| < |x_0|$.

b) Rayon de CV:

a/ Théorème: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. $\exists! R \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in K, \begin{cases} |x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ ACV} \\ |x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n \text{ DV grossièrement} \end{cases}$
 Pour $|x| = R$, on ne sait pas...

b/ Définitions: R est le rayon de CV de la série entière. Et le disque ouvert de centre 0 et rayon R est le disque de CV (ouvert).
 .. Dans \mathbb{R} , $] -R, +R[$ s'appelle l'intervalle ouvert de CV.

c/ Exemples: $\sum x^n, R = 1. \quad \sum \frac{x^n}{n!}, R = +\infty. \quad \sum \frac{x^n}{n}, R = 1.$

c) Calcul pratique du rayon de CV

a/ Règle d'Hôpital: Supposons que $\forall n, a_n \neq 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l \in \overline{\mathbb{R}}_+$, alors $R = \frac{1}{l}$.
 b/ Équivalents: Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ telles que $|a_n| \sim |b_n|$, alors les rayons sont les mêmes.

d) Somme, produit par un scalaire

a/ Propriété: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et $\lambda \in K^*$. La série entière $\sum \lambda a_n x^n$ a le même rayon de CV que $\sum a_n x^n$.
 b/ Propriété: Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons R_1 et R_2 . Soit R le rayon de $\sum (a_n + b_n) x^n$.
 Alors $R \geq \min(R_1, R_2)$, et si $R_1 \neq R_2$ alors $R = \min(R_1, R_2)$.

e) Produit de Cauchy de deux séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayons R_1 et R_2 . Alors, on définit $C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ et donc $\sum C_n x^n$ est le produit de Cauchy des deux séries entières. Son rayon est R' .

Théorème: Avec ces notations, $R' \geq \min(R_1, R_2)$

Théorème: Si $x \in K$ et $|x| < \min(R_1, R_2)$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right)$.

f) Convergence uniforme, convergence normale

a/ Théorème: Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Soit r tq $r \in]0, R[$, alors $\sum a_n x^n$ est NCV sur le disque de centre 0 et rayon r .
 b/ Théorème: Avec les mêmes notations, soit F un compact inclus dans le disque ouvert de CV. La série est NCV sur F .

III. Propriétés de la somme

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$. On se place sur le disque \mathbb{D}_r et on considère $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a) Continuité:

a/ Théorème: S est C^0 sur \mathbb{D}_r

b/ Conséquences: $\forall n, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_n x^n}{x^{n+1}} = a_{n+1}$ et $S(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^{n+1})$ ou $o(x^n)$.

b) Dérivabilité

a/ Théorème: $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de CV.

b/ Théorème de dérivation complexe: $\forall z \in \mathbb{C} / |z| < R$, on a: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(z+h) - S(z)}{h} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}$

c/ Théorème: S est \mathcal{D}^+ sur $] -R, R[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

d/ Conséquences: Soit C^0 sur $] -R, R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}$, $S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^{n-p} = \sum_{m=p}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-p+1) a_m x^{m-p}$
 Et donc, $a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}$

c) Intégration, primitive

a/ Intégration: Soit $[a, b] \subset] -R, R[$, alors $\int_a^b S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$.

b/ Primitive: La série primitive a le même rayon de CV que la série initiale.

d) Complément: inégalités de Cauchy

a/ Formule: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$

b/ Inégalités de Cauchy: Soit $M_r = \sup \{|S(z)|, |z| = r\}$, alors: $|a_n| \leq \frac{M_r}{r^n}$.

c/ Application: Supposons $R = +\infty$ et S bornée sur \mathbb{C} . Alors S est constante sur \mathbb{C} .

IV. Développement en série entière

a) Définition: Soit $f: U \subset K \rightarrow K$, avec U ouvert de $K: \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$ et contenant 0. Alors:

f est DSE au voisinage de 0 $\Leftrightarrow \exists V$ ouvert de K contenant 0, et $\forall u \in V$, et $\exists \sum a_n x^n$ CV tq $\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2) Unité: Si f est DSE, il y a une série entière de f .

3) Série de Taylor: Soit f DSE au voisinage de 0, alors $x \in V \cap R \mapsto f(x)$ est C^∞ sur $V \cap R$. Et $\forall n, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

IV) Etude directe à l'aide de la formule de Taylor

$K = R$ et $a \in R \cup \mathbb{C}$.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_0^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{(n+1)!} (x-a)^n dt$$

1) CNS: Soit $f \in C^\infty$ dans $\mathbb{C} \cap R$.

f est DSE de Taylor dans $\mathbb{C} \cap R \iff \forall x \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$.

2) Condition suffisante: Soit $f \in C^\infty$ sur \mathbb{C} , et supposons $\exists M \geq 0$ tq: $\forall x \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, |f^{(n)}(x)| \leq M$, alors f est DSE.

3) Exemples: sinus: $\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$ $R = +\infty$

cosinus: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ $R = +\infty$

exp: $\forall x \in [-A, A], e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ $R = +\infty$ est indicatif, car en fait $R = +\infty$.

V) Utilisation des propriétés caractéristiques de f

1) Principe: f est caractérisée par \mathcal{P} : ens. de ses ppts. (satisfait éq. diff), alors si on trouve une série entière $\sum u_n$ et dont la somme S vérifie sur \mathcal{D} les ppts \mathcal{P} , on en déduit que $S = f$.

VI) Intégration et dérivation

1) Intégration: $\forall x \in]-1, 1[, -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ donc $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ $R = 1$

$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ donc $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $R = 1$

$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{arsh} x = x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2^n n!)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

$\forall x \in]-1, 1[, \operatorname{arcsh} x = x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{(2^n n!)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$

2) Dérivation: $\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in]-|a|, |a|[, \frac{1}{(a-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{a^{n+1}}$ pour $|x| < |a|$

$\forall x \in \mathbb{C}, |x| < |a|, \frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}}$

et: $\frac{1}{(a-x)^p} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p}^p \frac{x^n}{a^{n+p+1}}$

VII) DSE de fonctions rationnelles

1) Problème: Soit $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fⁿ rationnelle complexe. $Q(0) \neq 0$. La décomposition en éléments simples donne: $F(x) = E(x) + \sum_{x \in \mathcal{D}} \sum_{i=1}^r \frac{A_i(x)}{(x-a_i)^i}$
avec r (n) ordre de multiplicité de x , et \mathcal{D} l'ensemble des pôles de F . $A_i(x) \in \mathbb{C}$.
On suppose que $Q(0) \neq 0$, donc $a \neq 0$, et encore toutes les fractions sont DSE. Par combinaison linéaire on obtient la DSE de F .
Le rayon de CV de la DSE de $\frac{1}{(x-a)^k}$ est $|a|$. Donc $R_F \geq \min_{x \in \mathcal{D}} |x|$.

2) Calcul de R_F : En fait, on a exactement $R_F = \min_{x \in \mathcal{D}} |x|$.

3) Exemple: $F(x) = \frac{1}{x^2 - \ln \cos x + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} x^n$, $\forall x, |x| < 1$. $R = 1$.

VIII) DSE d'une composée

1) Lemme: Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons R et R' . Soit $\sum c_n x^n$ leur produit de Cauchy.

Et soit $\sum d_n x^n$ le produit de Cauchy de $\sum |a_n| x^n$ et de $\sum |b_n| x^n$. Alors, $\forall n, |c_n| \leq d_n$.

On en déduit que pour $|x| \leq \min(R, R')$, $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} d_n |x|^n$ d'où: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \times \sum_{n=0}^{\infty} |b_n x^n|$

2) Composé: Soient f et g DSE au voisinage de 0, et tq $f(0) \neq 0$. Alors $g \circ f$ est DSE au voisinage de 0.

3) Exemples: Si f est DSE au voisinage de 0, et si $f(0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est DSE en 0.

Plus généralement, si f et g sont DSE en 0 avec $f(0) \neq 0$, alors $\frac{g}{f}$ est aussi DSE en 0.

IX) Somme de quelques séries entières

1) $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \frac{x^n}{n!}$: la règle de d'Alembert nous assure que $R > 0$.

$$\downarrow P(n) \cdot (x)$$

On décompose l'entière P dans la base de $K[x]$: $(1, x, \dots, x(x-1)(x-2) \dots (x-k), \dots) = \{P_k\}$.

Alors, on utilise $\sum_{n=0}^{\infty} P_k(n) \frac{x^n}{n!} = x^k \cdot e^x$.

2) Séries de la forme $\sum P(n) x^n$, $P \neq 0$: Par d'Alembert, on obtient $R > 0$. Ensuite, pour $P \neq 0$ on calcule: $\sum_{n=0}^{\infty} P(n) \cdot x^n = x^k \frac{h!}{(1-x)^{k+h+1}}$

3) Séries de la forme $\sum_{n+k=A} P(n) x^n$, $P \neq 0$ et $x \in \mathbb{Z}$: $R = 1$. $P(x) = (x+a)Q(x) + A$, $A \in K$. $\Rightarrow \frac{P(x)}{x^k} = Q(x) + \frac{A}{x^k}$.

Il suffit alors de calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+k}$.

X) Fonction analytique

1) Définition: Soit U un ouvert de $K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$, et $f: U \rightarrow K$. f analytique dans $U \iff f$ est DSE au voisinage de chaque point de U .

La reformulation avec $x = x_0 + h$ donne:

$$|h| < \rho(x_0) \Rightarrow f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0) \frac{h^n}{n!}$$

Alors, on en déduit que f est C^∞ sur U , que chaque $f^{(n)}$ est aussi analytique, et que: $a_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

2) Exemple fondamental: La somme d'une SE de rayon $R > 0$ est analytique dans $B(0, R)$.

3) Théorème des zéros isolés: Soit U un ouvert CPA de $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $f: U \rightarrow K$ analytique et non nulle. Alors:

$$\bullet \forall z \in U, \exists n / a_n(z) \neq 0. \text{ i.e. } \exists n / f^{(n)}(z) \neq 0.$$

$$\bullet \text{ Chaque zéro de } f \text{ est isolé. i.e. } f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \exists r > 0 / \forall x \in \mathcal{O}(z_0, r), f(x) = 0 \Rightarrow x = z_0.$$

4) Principe du prolongement analytique:

Théorème: Soient $f, g: U \subset K \rightarrow K$, analytiques dans U , avec U CPA. On suppose que f et g coïncident sur une partie A de U possédant un pt d'accumulation dans U . Alors, $\forall x \in U, f(x) = g(x)$.