I) EVN, espace vectoriel normé

1) Définition : un evn est un couple (E, N), avec E Kev et N une norme sur E tq : $\begin{cases} N : E \to \mathbb{R}^+ \\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x) \\ N(x+y) \leq N(x) + N(y) \end{cases}$

. Propriété : une norme vérifie aussi $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$

2) Exemples : $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{C}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, $\left(\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|\right)$

II) Espace métrique

1) Définition : Un espace métrique est un couple (E, d), avec E qcq nonvide et d une distance : $\begin{cases} d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y \\ d(x,y) = d(y,x) \\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$

2) Exemples : On peut créer une distance dérivée d'une norme $d(x,y) = N(x-y)$. On peut induire une distance de (E, d) sur $A \subset E$.

3) Définitions : . Une partie A est bornée dans $(E,d) \Leftrightarrow \exists M > 0 \ / \ \forall (x,y) \in A^2, \ d(x,y) \leq M$

.. Le diamètre de A non vide est : $\delta(A) = \sup \{ d(x,y), x \in A, y \in A \}$

... La distance entre deux parties : $d(A,B) = \inf \{ d(x,y), x \in A, y \in B \}$.

4) Boules : . Boule ouverte de centre a et rayon r : $B(a,r) = \{ x \in E \ / \ d(x,a) < r \} = a + r . B(0_E, 1)$.

.. Boule fermée de centre a et rayon r : $B'(a,r) = \{ x \in E \ / \ d(x,a) \leq r \} = a + r . B'(0_E, 1)$.

... Restriction à $A \subset E$: $B_A(a,r) = B_E(a,r) \cap A$.

III) Structure topologique d'un em

1) Voisinage d'un point :

a/ Définition : . $\mathcal{V}(a)$ est l'ensemble des voisinages du point a dans E.

.. $V \in \mathcal{V}(a) \Leftrightarrow$ V contient une boule ouverte de centre a $\Leftrightarrow \exists r > 0 \ / \ B(a,r) \subset V$

... Une intersection finie de voisinages est encore un voisinage.

b/ SFV : La famille $(V_i)_{i \in I}$ est un Système Fondamental de Voisinages de "a", si : $\begin{cases} \forall i \in I, \ V_i \in \mathcal{V}(a) \\ \forall V \in \mathcal{V}(a), \ \exists i \ / \ V_i \subset V \end{cases}$

Par exemple $(B(a,r))_{r \in \mathbb{R}^+_*}$ est un SFV de a.

2) Ouvert

a/ Définition : $\omega \subset E$ est un ouvert de E $\Leftrightarrow \forall x \in \omega, \ \omega \in \mathcal{V}(x) \Leftrightarrow \forall x \in \omega, \exists r > 0 \ / \ B(x,r) \subset \omega$.

b/ Topologie : L'ensemble des ouverts de E forme la "topologie" $\mathcal{T}$ de E. $\left(\bigcup_{\substack{qcq \\ \omega \in \mathcal{T}}} \omega\right) \in \mathcal{T}$ et $\left(\bigcap_{\substack{finie \\ \omega \in \mathcal{T}}} \omega\right) \in \mathcal{T}$.

c/ Topo des em : Dans le cas d'un em, la topo est "séparée", ie

$\forall a,b \in E^2, \ \exists (V,W) \in \mathcal{V}(a) \times \mathcal{V}(b) \ / \ V \cap W = \emptyset$. Les ouverts de E sont exactement les réunions de boules ouvertes.

3) Fermés

a/ Définition : $\phi \subset E$ est fermé $\Leftrightarrow \complement_E \phi$ est ouvert dans E.

b/ Propriété : $\bigcap_{\substack{qq \\ fermés}} \phi$ est fermée, $\bigcup_{\substack{finie \\ fermés}} \phi$ est fermée.

4) Topologie induite : (A, d_A) sem de (E, d).

a/ Voisinages : Soit $a \in A$. $V' \in \mathcal{V}_A(a) \Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \ / \ V' = V \cap A$.

b/ Ouverts : $\omega' \in \mathcal{T}(A) \Leftrightarrow \exists \omega \in \mathcal{T}(E) \ / \ \omega' = \omega \cap A$.

c/ Fermés : ϕ' fermé de A $\Leftrightarrow \exists \phi$ fermé de E tq $\phi' = \phi \cap A$.

IV) Autres notions topologiques

1) Intérieur d'une partie A

a/ Définition : L'intérieur de A est : $\mathring{A} = \bigcup_{\substack{\omega \subset A \\ \omega \text{ ouvert}}} \omega$, c'est donc le + grand ouvert inclu dans A.

b/ Point intérieur : $x \in \mathring{A} \Leftrightarrow A \in \mathcal{V}(x)$

c/ Propriétés : . $A = \mathring{A} \Leftrightarrow$ A est ouvert ... $\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

.. $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$ .... $\widehat{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

d/ Extérieur et Frontière : L'extérieur de A est $\mathring{\complement A}$. La frontière de A est : $Fr A = \partial A = E \setminus \left(\mathring{A} \cup \mathring{\complement A}\right)$. $Fr(A) = Fr(\complement A)$.

La frontière de A est un fermé de E.

2) Adhérence d'une partie

a/ Définition : L'adhérence de A est : $\overline{A} = \bigcap_{\substack{\phi \text{ fermé} \\ A \subset \phi}} \phi$, c'est le + petit fermé contenant A.

b/ Propriété : . $A = \overline{A} \Leftrightarrow$ A fermé ... $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

.. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$ .... $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

c/ Lien avec l'intérieur : $\complement \overline{A} = \mathring{\complement A}$ On en déduit $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

d/ Point adhérent : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_E(x), \ V \cap A \neq \emptyset. \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

3) Partie partout dense : Une partie A d'un em (E, d) est partout dense dans E si $\overline{A} = E$.

On a aussi la caractérisation : A partout dense $\Leftrightarrow \forall \omega \in \mathcal{T}(E) \setminus \{\emptyset\}, \ \omega \cap A \neq \emptyset$.

4) Point isolé : Soit (E, d) un em. Un point "a" est isolé de E $\Leftrightarrow \{a\}$ est un ouvert de E $\Leftrightarrow \{a\} \in \mathcal{V}_E(a)$.

Un point "a" est isolé de $A \subset E \Leftrightarrow \{a\}$ ouvert de A $\Leftrightarrow \exists V \in \mathcal{V}(a) \ / \ V \cap A = \{a\}$.

5) Point d'accumulation

a/ Définition : Soit (E,d) un em, et $A \subset E$. a est un pt d'accumulation de $A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, $V \cap A$ est infini.

b/ Caractérisation : $a \in E$ est pt d'accum de $A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, $V \cap A \not\subset \{a\}$

c/ Description : Deux cas de figure se présentent $\Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_E(a)$, $V \cap (A \setminus \{a\}) \neq \emptyset$

. Soit $a \in A$, alors : a pt d'accumulation $\Leftrightarrow$ a non isolé de A

.. Soit $a \notin A$, alors : a pt d'accumulation $\Leftrightarrow$ $a \in \overline{A}$

(V) Comparaisons de topologies

Soit E muni de deux distances d_1 et d_2. On cherche à comparer $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$.

1) Définition : $\mathcal{T}_1$ est + fine que $\mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$

. Propriété : $d_2 \leq \alpha . d_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$.

2) Normes équivalentes

a/ Définition : N_1 est équivalente à $N_2 \Leftrightarrow \exists (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^{*2} \,/\, N_2 \leq \alpha N_1$ et $N_1 \leq \beta N_2$.

b/ Propriété : N_1 et N_2 sont équivalentes $\Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow$ elles définissent la m topologie sur E.

c/ Exemples : . En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

.. Sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, de dimension ∞, N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

3) Distances équivalentes

. Définition 1 : d_1 est "topologiquement équivalente" à $d_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

. Définition 2 : d_1 est "équivalente" à $d_2 \Leftrightarrow \exists \alpha,\beta > 0 \,/\, d_2 \leq \alpha d_1$ et $d_1 \leq \beta d_2$.

On remarque que : EQ $\Rightarrow$ TOP EQ

(VI) Espace métrique produit

1) Définition : Soit un em produit : $E = E_1 \times \dots \times E_m = \prod_i E_i$, muni de la distance $d(x,y) = \max_i \left(d_i(x_i,y_i) \right)$.

De même, on pose $N : x \in E \longmapsto N(x) = \max_i \left(N_i(x_i) \right)$.

2) Boules d'un em produit : $B_E(a,r) = \prod_i B_{E_i}(a_i,r)$.

3) Ouverts élémentaires : Soit $\omega_i \in \mathcal{T}(E_i)$, alors $\omega = \prod_i \omega_i$ est un "ouvert élémentaire" de E.

Inversement, ϕ_i fermés de E_i, alors $\Phi = \prod_i \phi_i$ est fermé dans E