$\mathbb{R}$ et les suites réelles

(I) Corps des réels.

1) Définition : Il existe un corps totalement ordonné possédant l'axiome de borne sup. Il est unique à un isomorphisme de corps près : $\mathbb{R}$.

- Un corps est totalement ordonné $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{muni d'un ordre total} \geq \\ \forall (x,y,a) \in K^3,\ x \geq y \Rightarrow a+x \geq a+y \\ \forall (x,y) \in K^2,\ (x \geq 0,\ y \geq 0) \Rightarrow x.y \geq 0 \end{cases}$
- Axiome de B.S : Toute partie majorée non vide $A \subset \mathbb{R}$ possède une BS notée $\sup(A)$.

$$\mu = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq \mu \\ \forall M \in \mathbb{R},\ (\forall x \in \mathbb{R}, x \leq M) \Rightarrow \mu \leq M. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leq \mu \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A \ /\ x > \mu - \varepsilon \end{cases}$$

- Remarque : $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$
  $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$

2) Propriétés de $\mathbb{R}$

a/ Définition : Toute partie minorée non vide $A \subset \mathbb{R}$ possède une borne inf (BI), noté $\inf(A)$.

b/ Ppté : $\mathbb{R}$ est archimédien, ie : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \ / \ nx > y$.

c/ Caractéristique : $\mathbb{R}$ est de caractéristique zéro, ie : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ nx = 0 \Rightarrow n = 0$ ou $x = 0$.

3) Suites réelles

a/ Convergence : (x_n) CV vers $l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |x_n - l| \leq \varepsilon$.

b/ Convergence et ordre :
- Prolongement des inégalités larges : si $(x_n) \to l$ et $\forall n,\ x_n \geq 0$, alors $l \geq 0$.
- Théorème des gendarmes : $\forall n,\ x_n \leq y_n \leq z_n$ et $(x_n) \to l$ et $(z_n) \to l$, alors $(y_n) \to l$.

c/ Suites monotones : Théorème : Soit $(x_n) \nearrow$. Si (x_n) majorée alors elle converge, sinon elle diverge vers $+\infty$.

d/ Suites adjacentes : Théorème : Soit $(x_n) \nearrow$ et $(y_n) \searrow$ avec $(x_n - y_n) \to 0$, alors elles convergent vers la même limite.

e/ Théorème de segments emboîtés : Soit (I_n) suite de segments de $\mathbb{R}$ tq : $\begin{cases} \forall n,\ I_{n+1} \subset I_n \\ \delta(I_n) \to 0 \end{cases}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ est un singleton. $(\neq \emptyset)$

f/ Théorème de Bolzano Weierstrass : De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite CV.

g/ $\mathbb{R}$ est complet :
- Suite de Cauchy : $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ n \geq m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$
- Théorème : Dans $\mathbb{R}$, toute suite de cauchy converge.

4) Dénombrabilité

a/ Définition : Un ensemble A est dit "dénombrable" s'il existe une bijection entre A et $\mathbb{N}$. Il est "au + dénombrable" s'il est fini ou dénombrable

b/ Propriété : Toute partie infinie $A \subset \mathbb{N}$ est dénombrable.

c/ Propriété : Si B est ∞, et s'il existe une application surjective $g : \mathbb{N} \to B$, alors B est dénombrable.

d/ Remarque : $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(II) $\overline{\mathbb{R}}$

On adjoint $+\infty$ et $-\infty$ à $\mathbb{R}$, ce qui donne $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

(III) Sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{R},+)$ est un gpe commutatif ; que dire des ssgpes de $(\mathbb{R},+)$?

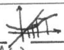
1) Rappel : On sait que $A \subset \mathbb{R}$ est partout dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ elle rencontre tout intervalle non vide de $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b,\ ]a,b[\cap A \neq \emptyset$.

2) Théorème : Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont : $\begin{cases} \text{- ou bien de la forme } a\mathbb{Z} = \{ na \ / \ n \in \mathbb{Z} \}, \text{ et il est discret} \\ \text{- ou bien partout dense dans } \mathbb{R}. \end{cases}$

(IV) Etude pratique des suites réelles.

1) Existence d'une suite récurrente : Soit $f : D \to \mathbb{R}$. La suite $u_n = f(u_{n-1})$ est définie $\Leftrightarrow f(D) \subset D$.

2) Idée du résultat : tracer la fonction f.



3) Points fixes de f : ce sont les racines de $f(x) = x$.
- Propriété : Si (u_n) CV vers $l \in D$, et si f est C^0 en l, alors l est un pt fixe de f.

4) Etude de monotonie

a/ Base : On cherche le signe des $(u_{n+1} - u_n) = f(u_n) - f(u_{n-1}) = f(u_n) - u_n$.

b/ Pptés : Si $f \nearrow$ sur $\mathcal{D}$, alors (u_n) monotone.

c/ Cas particulier : Si $f \searrow$ sur $\mathcal{D}$, alors $(f \circ f) \nearrow$ sur $\mathcal{D}$. (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et de sens opposé.
(u_n) CV $\Leftrightarrow$ (u_{2p}) et (u_{2p+1}) CV vers la m limite.

5) Théorème du point fixe :
- Soit $f : I \to I$, k-contractante, où I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors : $\begin{cases} \cdot\ f(x) = x \text{ possède dans } I \text{ une unique racine "r"} \\ \cdot\ \forall u_0 \in I,\ u_n = f(u_{n-1}) \text{ CV vers } r \end{cases}$
- Rappelons que k-contractante $\Leftrightarrow \exists k \in [0,1[\ / \ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.
  Et si f dérivable, cela équivaut à $|f'(x)| \leq k,\ \forall x \in I$.

6) Etude des points fixes :
- On suppose f C^1, et "a" un pt fixe : $f(a) = a$. Si $|f'(a)| \neq 0$, le point est dit hyperbolique. Et, $\begin{cases} \text{Si } |f'(a)| < 1 \to \text{attracteur.} \\ \text{Si } |f'(a)| > 1 \to \text{répulseur.} \end{cases}$

a/ Propriétés : Supposons $|f'(a)| < 1$, alors $\exists \eta > 0 \ / \ \forall u_0 \in (]a-\eta, a+\eta[\cap \mathcal{D})$, (u_n) CV vers a.

b/ Propriété : Supposons $|f'(a)| > 1$, alors $\exists \eta > 0 \ / \ \forall u_0 \in (]a-\eta, a+\eta[\cap \mathcal{D})$, $u_0 \neq a$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $u_N \notin]a-\eta, a+\eta[$.

(V) Récurrence linéaire

$u_{n+p} = a_{p-1} . u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n$, $a_0 \neq 0$.

- L'ensemble des suites qui vérifient cette relation forme un ev sur $K^{\mathbb{N}}$, noté S_K, pour (a_i) fixés.

Toute suite est entièrement définie par $(u_0, \dots, u_{p-1}) \in K^p$, par conséquent $\varphi : \begin{array}{l} S_K \to K^p \\ u \mapsto (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{array}$ est une bijection.

On a : $\dim S_K = \dim K^p = p$.

1) **Espaces S_K** : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour $(a_0, \dots, a_{p-1})$ donnés, l'ens. des suites qui vérifient $u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n$ est un sev de $K^{\mathbb{N}}$ noté S_K. Nous avons $\dim S_K = \dim K^p = p$.

2) **Suites (r^n) dans S_K** : Cette suite est dans S_K si elle vérifie l'équation caractéristique $P(x) = x^p - a_{p-1}x^{p-1} - \dots - a_0 = 0$.

3) **Cas général sur $\mathbb{C}$** : L'équation $P(x) = 0$ possède s racines distinctes $r_1, \dots, r_s$ de multiplicités $m_1, \dots, m_s$ $\mid \sum_{i=1}^{s} m_i = p$.

a/ **Propriété** : Si r est une racine de P, de multiplicité m, toutes les suites de la forme $(Q(n) r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où Q est un polynôme de degré $\leq m-1$ sur K, sont dans S_K.

b/ **Théorème** : Les suites $(n^j r_i^n)$ avec $i = 1, \dots, s$ et $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ constituent une base de S_K.

4) **Cas général sur $\mathbb{R}$** :
Nous avons une base sur $\mathbb{C}$. Transformons-la pour l'obtenir sur $\mathbb{R}$: lorsque $r_k \notin \mathbb{R}$, son conjugué $\overline{r_k}$ est aussi racine de P donc on remplace $(n^j r_k^n)$ et $(n^j \overline{r_k}^n)$ par $\left(\frac{1}{2}(n^j r_k^n + n^j \overline{r_k}^n)\right)$ et $\left(\frac{1}{2i}(n^j r_k^n - n^j \overline{r_k}^n)\right)$, cad si $r_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ $(n^j \rho_k^n \cos n\theta_k)$ et $(n^j \rho_k^n \sin n\theta_k)$ qui sont réelles. C'est une base sur $\mathbb{C}$, mais aussi sur $\mathbb{R}$ car toutes les suites sont réelles.

VI. Récurrences homographiques.

Récurrences de la forme $u_{n+1} = \dfrac{a u_n + b}{c u_n + d}$ avec $(a,b,c,d) \in K^4$ $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et $ad - bc \neq 0$ sinon la suite est constante.
Notons que $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est injective et que (u_n) n'est définie que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $c u_n + d \neq 0$.

1) **Cas où $c = 0$** : nécessairement $d \neq 0$ et donc $u_{n+1} = A u_n + B$ bien connue.

2) **Cas où $c \neq 0$** : supposons la suite bien définie

. $-d/c$ ne peut pas être la limite de (u_n), et donc en passant à la limite dans la récurrence : $l = \dfrac{a l + b}{c l + d}$
donc $c l^2 + (d-a) l - b = 0$ avec $c \neq 0$. (2)

.. Si l'équation possède deux racines distinctes α et β. Notons que si $u_0 = \alpha$ ou β alors la suite est constante.
On introduit $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} - \beta} = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c} v_n$, et $k = \dfrac{a - \alpha c}{a - \beta c} \neq 1$ car $\alpha \neq \beta$ et $k \neq 0$ car a/c n'est pas racine de (2).
Ainsi $v_n = k^n v_0$ et donc $u_n = \dfrac{\alpha - k^n v_0 \beta}{1 - k^n v_0}$.

$$\begin{cases} \text{si } |k| < 1, & \lim u_n = \alpha \\ \text{si } |k| > 1, & \lim u_n = \beta \\ \text{si } |k| = 1, & (v_n) \text{ ne CV pas} \dots \end{cases}$$

... Si l'équation possède une racine double γ.
On introduit $w_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$ et on vérifie que (w_n) est arithmétique : $w_n = w_{n-1} + k$, $k \neq 0$.
Par suite, on obtient $u_n = \gamma + \dfrac{1}{w_0 + nk}$ de sorte que $\lim u_n = \gamma$.