Espaces de Sobolev en dimension 1

(I) Dérivées faibles

1) Définition $(I =]a,b[)$

. DEF : $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ est dérivable au sens faible $\Leftrightarrow$ $\exists\, \tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$ tq $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I)$, $\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_I v\varphi\,dx$

. PROP : Si $\tilde{u}$ est D^1 au sens faible, il y a unicité de la dérivée faible notée $\tilde{u}'$.

. PROP : Soit $u \in \mathcal{C}^1(I)$. Alors $\tilde{u}$ est D^1 faible avec $\tilde{u}' = \widetilde{u'}$.

. PROP : Soit $u \in \mathcal{C}^0(I)$, tq $u \in \mathcal{C}^1(]a_i, a_{i+1}[)$ $\forall i = 1 \dots n$. De plus on suppose que u', défini pp, est localement int^{ble} sur I. Alors $\tilde{u}$ admet pour dérivée faible $\tilde{v}$ définie par $v|_{]a_i,a_{i+1}[} = u'|_{]a_i,a_{i+1}[}$

2) Propriétés

. PROP : Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ tq $\int_I u(x)\varphi'(x)\,dx = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I)$.
Alors $\tilde{u} = c$.

. PROP : Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$ à dérivée faible $\tilde{v} \in L^1_{loc}(I)$. Alors $\exists !\, \bar{u} \in \mathcal{C}^0(I)$ tq $u = \bar{u}$ pp
et $\forall x, y \in I$, $\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x v(t)\,dt$.

. PROP : Soit $\tilde{u} \in L^1_{loc}(I)$. On dit que $\tilde{u}$ est D^1 au sens faible jusqu'à l'ordre $m \geq 1$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m \in L^1_{loc}(I)$ tq $\forall j = 1 \dots m$, $\int_I u(x)\, D^j\varphi(x)\,dx = (-1)^j \int_I v_j(x)\varphi(x)\,dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I)$.

. PROP : Soit $u \in \mathcal{C}^m(I)$, alors $\tilde{u}$ est D^1 au sens faible jusqu'à l'ordre m et $\widetilde{D^j u}$ est la dérivée faible d'ordre j de $\tilde{u}$, $\forall j = 1 \dots m$.

(II) Espaces de Sobolev

. DEF : L'espace de Sobolev $H^1(I)$ est défini par $H^1(I) = \{ \tilde{u} \in L^2(I) \text{ ayant une dérivée faible } \tilde{u}' \in L^2(I) \}$
De même, $H^m(I) = \{ \tilde{u} \in L^2(I) \text{ tq } \forall k = 1 \dots m,\ D^k u \in L^2(I) \}$

. PROP : $\begin{cases} \text{(a) Soit } u \in \mathcal{C}^1(I) \cap \mathcal{L}^2(I) \text{ tq } u' \in \mathcal{L}^2(I), \text{ alors } \tilde{u} \in H^1(I) \text{ et } \tilde{u}' = \widetilde{u'}. \\ \text{(b) On suppose } I \text{ borné, alors } \mathcal{C}^m(\bar{I}) \subset H^m(I),\ \forall m \geq 1. \end{cases}$

. Théorème : $\begin{cases} \text{(a) } (\tilde{u}, \tilde{v})_{H_1} = \int_I \tilde{u}\tilde{v}\,dx + \int_I \tilde{u}'\tilde{v}'\,dx \text{ définit un produit scalaire sur } H^1(I). \\ \text{(b) } (H^1(I), (\cdot|\cdot)_{H_1}) \text{ est un espace de Hilbert.} \end{cases}$

. Théorème : Soit $\tilde{u} \in H^1(I)$, alors $\exists !\, \bar{u} \in \mathcal{C}(\bar{I})$ tq $u = \bar{u}$ pp. De plus $\bar{u}(x) - \bar{u}(y) = \int_y^x v(t)\,dt$, $v \in \tilde{u}'$

. Corollaire : . Soit $u \in H^1(I)$ tq $u' \in \mathcal{C}(\bar{I})$, alors $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$.
.. IPP dans $H^1(I)$; $\forall u, v \in H^1(I)$ et $\forall c, d \in \bar{I}$ $(c<d)$, on a : $\int_c^d u'v\,dx = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d u v'\,dx$

. Théorème : Les fonctions de $H^1(I)$ sont bornées.
De plus, $\exists\, c > 0$ tq $\forall u \in H^1(I)$, $\|u\|_\infty \leq c \cdot \|u\|_{H^1}$

. Conséquence : $\forall x \in \bar{I}$, l'application $u \longmapsto u(x)$ est C^0 de $H^1(I) \to \mathbb{R}$.
C'est le théorème de Trace.

. DEF : $H^1_0(I)$ est l'adhérence de $\mathcal{C}^\infty_c(I)$ dans $H^1(I)$, $= \{ u \in H^1(I) \,/\, u = 0 \text{ sur } \partial I \}$

. Théorème (Inégalité de Poincaré) : Soit I borné, alors $\exists\, c > 0 \,/\, \forall v \in H^1_0(I)$, $\|v\|_{L^2(I)} \leq c \cdot \|v'\|_{L^2(I)}$.
Donc $v \longmapsto \|v'\|_{L^2(I)}$ est équivalente à la norme $\|v\|_{H^1(I)}$.