Séries à termes réels positifs

(I) Théorème Fondamental de CV

1) Propriété : Soit $\sum u_n$ à termes positifs, alors (S_n) est croissante.

2) Théorème : (S_n) majorée $\Leftrightarrow \sum u_n$ CV

3) Groupement de termes : Si $\sum u_n$ à termes ≥ 0, et $v_p = \sum_{n=\varphi(p-1)+1}^{\varphi(p)} u_n$, alors : $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum v_n$ CV.

(II) Théorèmes de comparaison

1) Théorème 1 (comparaison) : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels positifs. On suppose $\forall n$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Alors : $\begin{cases} \sum v_n \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV} \\ \sum u_n \text{ DV} \Rightarrow \sum v_n \text{ DV} \end{cases}$

2) Théorème 2 (domination) : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels positifs. On suppose $u_n \underset{\infty}{=} O(v_n)$, alors $\sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV.

3) Théorème 3 (équivalence) : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes réels positifs. On suppose $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

4) Théorème 4 (comparaison logarithmique) : $\sum u_n$ et $\sum v_n$ à termes strictement positifs. On suppose $\forall n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors : $\sum v_n$ CV $\Rightarrow \sum u_n$ CV.

5) Exemples et applications

a/ Logarithme : $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Alors (a_n) est CV. Sa limite est $\gamma = 0{,}5772\ldots$, c'est la constante d'Euler.

b/ Formule de Stirling : On montre que $\exists A \in \mathbb{R}_+^* \,/\, n! \underset{\infty}{\sim} A.n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}$. Plus précisément, $n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}.n^{n+\frac{1}{2}}.e^{-n}$.

6) Séries de Riemann : Théorème : $\sum \frac{1}{n^\alpha} \begin{cases} \text{CV si } |\alpha| > 1 \\ \text{DV si } |\alpha| \leq 1 \end{cases}$ On peut poser $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\zeta :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, c'est la fonction de Riemann.

(III) Règles usuelles d'étude

1) Comparaison avec une série de Riemann : [Règle $n^\alpha u_n$] : $\sum u_n$ à termes réels positifs et $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose l'existence de $\lim_{n \infty} n^\alpha u_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\begin{cases} \cdot \text{ Si } l \in \mathbb{R}_+^*,\ \sum u_n \text{ CV} \Leftrightarrow \alpha > 1 \\ \cdot\cdot \text{ Si } l = 0 \text{ et } \alpha > 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ CV} \\ \cdot\cdot\cdot \text{ Si } l = +\infty \text{ et } \alpha \leq 1, \text{ alors } \sum u_n \text{ DV} \end{cases}$

. Exemple : . $\sum n^\beta e^{-n}$ CV

.. Séries de Bertrand : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $\begin{cases} \alpha < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV} \\ \alpha > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ CV} \\ \alpha = 1 \ ??? \end{cases}$

2) Règle de d'Alembert (comparaison avec une série géométrique)

a/ Propriété : $\sum u_n$ à termes strictements positifs. $\begin{cases} \cdot \text{ On suppose } \exists a \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists N > 0 \,/\, n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq a. \text{ Alors, si } a < 1,\ \sum u_n \text{ CV.} \\ \cdot\cdot \text{ On suppose } \exists N > 0 \,/\, n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1. \text{ Alors } \sum u_n \text{ DV grossièrement.} \end{cases}$

b/ Règle de d'Alembert :

$\sum u_n$ à termes strictement positifs. On suppose $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. $\begin{cases} \cdot\ l < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ CV} \\ \cdot\ l > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ DV} \\ \cdot\ l = 1 \Rightarrow \text{cas douteux...} \end{cases}$

c/ Exemple : $\sum \frac{x^n}{n!}$ CV

b/ Majoration du reste : Soit $\sum u_n$ à termes positifs, et $\exists a \in]0,1[$ et $\exists N > 0$ tq $n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < a$.

Alors : $n+1 \geq N \Rightarrow 0 < R_n \leq \frac{u_{n+1}}{1-a}$

3) Règle de Cauchy : $\sum u_n$ à termes positifs. On suppose $\lim_{n \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. $\begin{cases} \cdot \text{ Si } l < 1,\ \sum u_n \text{ CV} \\ \cdot\cdot \text{ Si } l > 1,\ \sum u_n \text{ DV} \\ \cdot\cdot\cdot \text{ Si } l = 1, \text{ cas douteux} \end{cases}$

(IV) Comparaisons avec une intégrale

1) Théorème : Soit f cpm et positive, de $[0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$. Soit (a_n) strict $\uparrow$ et tq $a_0 = 0$ et $\lim_{n \infty} a_n = +\infty$. On pose alors $u_n = \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,dt$

Donc : $\sum u_n$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

2) Théorème :

a/ Enoncé : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ cpm, positive et $\downarrow$. On pose $u_n = f(n)$. Alors : La série $\sum w_n$ tq $w_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - u_n$, est CV $\Leftrightarrow \sum \int_n^{n+1} (f(t) - f(n))\,dt$ est CV

b/ Conséquences : Sous les m̂ hypothèses, $\sum f(n)$ CV $\Leftrightarrow f$ intégrable sur $\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} f$ existe.

. Et en cas de CV, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$.

.. Et en cas de DV, $S_n \underset{\infty}{\sim} \int_0^n f(t)\,dt$.

3) Exemples :

. $\int_\pi^\infty \frac{\sin^2 t}{t}\,dt$ DV

.. Séries de Riemann pour $\alpha > 1$: $\frac{1}{n+1} \leq R_n \leq \frac{1}{n}$, donc $R_n \underset{\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

... Séries de Bertrand : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$, $\alpha = 1$. $\begin{cases} \beta > 1, \text{ CV} \\ \beta \leq 1, \text{ DV} \end{cases}$