I) Cas où E est de dim finie

1) **Rapportons E à une base** : $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E. Alors, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sum_{i=1}^{p} u_n^i e_i$ ($u_n^i\in\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Donc $S_n=\sum_{i=1}^{n} S_n^i e_i$. (S_n) CV $\Leftrightarrow \forall i, (S_n^i)$ CV. D'où, $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \forall i, \sum u_n^i$ CV.

2) **Cas des séries complexes** : $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow \sum \overline{u_n}$ CV.

II) Convergence absolue

1) **Rappel des techniques rencontrées**

a/ **Majoration** : Soit $\sum u_n$ à termes positifs et $\|v_n\|\leq u_n$ pour tout n. Alors, $\sum u_n$ CV $\Rightarrow \sum v_n$ ACV

b/ $n^\alpha\|u_n\|$ est applicable

c/ **Règle de d'Alembert** : Soit $\sum u_n$ tq $\forall n$, $u_n\neq 0$. On suppose $\exists l=\lim_\infty \frac{\|u_{n+1}\|}{\|u_n\|}$. $\begin{cases} \text{Si } l<1, \text{ ACV} \\ \text{Si } l>1, \text{ DV} \\ \text{Si } l=1, \ ? \end{cases}$

2) **Structure vectorielle** : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries ACV dans E, et $\lambda\in K$, alors $\sum(u_n+\lambda v_n)$ ACV.

3) **Majoration du reste** : $\sum u_n$ ACV $\Rightarrow \|R_n\|\leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\|u_k\|$.

III) Comparaison avec une intégrale

. **Théorème** : Soit $f:\mathbb{R}^+\to E$, avec E de dim finie, et f C^1 tq. $\int_0^{+\infty}\|f'(t)\|dt$ CV. Soit $w_n=\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$. Alors : $\sum w_n$ est ACV.

. **Corollaire** : On suppose $\int_0^{+\infty}\|f'(t)\|dt$ CV et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ CV . Alors $\sum f(n)$ CV
(resp. $\int_0^{+\infty}\|f(t)\|dt$ CV) (resp. $\sum\|f(n)\|$ CV, d'où $\sum f(n)$ ACV).

IV) Séries semi-CV

1) **Définition** : Une série est semi-CV, si elle est CV mais non ACV.

2) **Critère spécial aux séries alternées** :

a/ **Définition** : $\sum u_n$, avec $u_n\in\mathbb{R}$, est alternée si deux termes consécutifs sont de signes opposés.

b/ **Théorème** : Soit $\sum u_n$ avec $u_n\in\mathbb{R}$ telle que : $\sum u_n$ alternée, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}\searrow$, et $\lim_\infty u_n=0$ $\Rightarrow \sum u_n$ CV.

c/ **Exemple** : $\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ $\begin{cases}\alpha>1 \to \text{ACV}\\ \alpha\leq 1 \to \text{semi CV}\end{cases}$

d/ **Encadrement du reste** : $\sum u_n$ CV vérifiant les pptés du critère spécial, alors R_n est compris entre 0 et u_{n+1}.

3) **Autres méthodes**

a/ **Groupement fini de termes** : $\begin{cases} \text{. On groupe } k \text{ par } k\\ \text{. } \sum v_p \text{ CV} \\ \text{. } \lim_\infty u_n=0\end{cases}$ $\Rightarrow \sum u_n$ CV

b/ **Utilisation des DL** : par exemple, on montre que $\sum\left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$ est DV.

V) Sommation des relations de comparaison

1) **Cas de convergence**

a/ **Théorème** : Soit $\sum u_n$ une série dans E. Soit $\sum v_n$ une série dans $\mathbb{R}^+$ et CV. Alors $\begin{cases}\text{. Si } u_n=_\infty O(v_n), \text{ alors } R_n=O\left(\sum_{n+1}^{\infty} v_k\right)\\ \text{. Si } u_n=_\infty o(v_n), \text{ alors } R_n=o\left(\sum_{n+1}^{\infty} v_k\right)\\ \text{. Si } u_n\sim_\infty l v_n, \text{ alors } R_n\sim l\sum_{n+1}^{\infty} v_k.\end{cases}$

b/ **Exemples**.

2) **Cas de divergence**

a/ **Théorème** : Soit $\sum u_n$ une série dans E. Soit $\sum v_n$ une série dans $\mathbb{R}^+$ et DV. Alors $\begin{cases}\text{. Si } u_n=_\infty O(v_n), \text{ alors } U_n=_\infty O(V_n)\\ \text{. Si } u_n=_\infty o(v_n), \text{ alors } U_n=_\infty o(V_n)\\ \text{. Si } u_n\sim_\infty l v_n, \text{ alors } U_n\sim_\infty l V_n\end{cases}$

b/ **Exemples** :
. $\sum \sin\frac{1}{n}$ DV, donc $S_n\sim\ln n$
.. $\sum \ln k$ DV, donc $S_n\sim n\ln n$
... $\sum e^{k^2}$ DV, donc $S_n\sim e^{n^2}$

3) **Césaro**

. **Propriété** : Soit (u_n) CV de limite l, alors $\lim_\infty \frac{u_1+\dots+u_n}{n}=l$.

. **Généralisation** : $u_n\to_\infty l$, et soit $\sum a_n$ une série DV à termes positifs. Alors $\lim_\infty\frac{a_1u_1+\dots+a_nu_n}{a_1+\dots+a_n}=l$.