(I) Séries trigonométriques

1) <u>Définition</u> : . Une série trigonométrique est de la forme : $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$.

.. Une autre écriture complexe est : $c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$, avec : $c_0 = \frac{a_0}{2}$ et $\begin{cases} c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \\ c_{-n} = \frac{a_0}{2} - \frac{b_n}{2i} \end{cases}$

... A l'inverse, on a : $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

2) <u>Cas particuliers</u> : . Si $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ sont CV, alors la série trigo est NCV. Dans ce cas, la somme $f(t)$ est 2π-périod. et continue.

.. Idem pour $\sum |c_n|$ et $\sum |c_{-n}|$.

... Si $\sum n|a_n|$ et $\sum n|b_n|$ sont CV, alors f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(t) = \sum u_n'(t)$.

3) <u>Motivation</u> : Si $\sum_{\mathbb{Z}} c_n e^{int}$ est UCV sur $\mathbb{R}$, de somme f, alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-int}$ et $\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt. \end{cases}$

(II) Séries de Fourier

1) <u>Espace de Travail</u> : On considère $\mathcal{CM}_{2\pi}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodique et cpm sur $\mathbb{R}$.

2) <u>Coefficients de Fourier, Séries de Fourier</u> : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Alors on définit : $c_n(f) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}$

Et aussi : $a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\, dt$ et $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\, dt$.

3) <u>Propriétés des coefficients de Fourier</u> : $\begin{cases} \cdot f \text{ paire} \Rightarrow b_n(f) = 0 \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt\, dt \\ \cdot f \text{ impaire} \Rightarrow a_n(f) = 0 \text{ et } b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt. \end{cases}$

. Remarquons que si f est réelle, alors $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont dans $\mathbb{R}$, et donc $c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}$.

. <u>Majoration</u> : $\|c_n(f)\|_\infty = \|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_1$, avec $\|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\, dt$.

. <u>Limites</u> : D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, on a : $\lim_{n \infty} c_n(f) = \lim_{n \infty} a_n(f) = \lim_{n \infty} b_n(f) = 0$.

. <u>Translation</u> : Soit $f_a : t \mapsto f(t+a)$. Alors $c_n(f_a) = e^{ina} . c_n(f)$.

. <u>Dérivée</u> : Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et f est C^1 pm et C^0 sur $\mathbb{R}$, alors $c_n(Df) = in . c_n(f)$. De même : $\begin{cases} a_n(Df) = n b_n(f) \\ b_n(Df) = -n a_n(f) \end{cases}$

Une conséquence est que si f est C^k, $\lim_{n \infty} n^k c_n(f) = 0 \Rightarrow c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

(III) Convergence ponctuelle

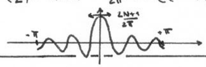
1) <u>Noyau de Dirichlet</u> : On définit $D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{+N} e^{int}$. Avec ceci, on définit encore : $S_N f(t) = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) D_N(t-x)\, dx = (f * D_N)(t)$.

2) <u>Propriétés de D_N</u> : . le noyau D_N est C^0, 2π périodique et même C^∞.

. $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, dt = 1$.

. En regroupant les termes, $D_N(t) = \frac{1}{2\pi}\left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N} \cos nt\right)$. Par conséquent : $\sin\left(\frac{t}{2}\right) . D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \sin\left((2N+1)\frac{t}{2}\right)$.

On en déduit que si $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $D_N(t) = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin t/2}$, et si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, $D_N(t) = \frac{2N+1}{2\pi}$.



3) <u>Propriété (lemme)</u> : . Soit $g : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, cpm, et C^0 et D^1 en 0. Alors, $\lim_{N \infty} \int_0^{\pi} D_N(t) g(t)\, dt = \frac{1}{2} g(0)$.

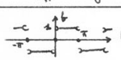
. Soit $g : [-\pi, 0] \to \mathbb{C}$, cpm, et C^0 et D^1 en 0. Alors : $\lim_{N \infty} \int_{-\pi}^{0} D_N(t) g(t)\, dt = \frac{1}{2} g(0)$.

4) <u>Théorème de Dirichlet</u> : Soit f une application 2π périodique de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe C^1 par morceaux.

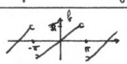
Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, la série de Fourier est CV de somme $\frac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right)$.

. <u>Définition</u> : On appelle $\tilde{f}$ la régularisée de f, telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f(t+) + f(t-)\right)$.

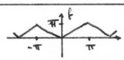
5) <u>Exemple</u> :



$f(t) = \sum_{0}^{\infty} \frac{4 \sin(2p+1)t}{\pi(2p+1)}$



$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nt)$



$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos(2p+1)t}{(2p+1)^2}$

(IV) Espace préhilbertien complexe $\mathcal{D}$

1) <u>Définition</u> : On définit $\mathcal{D}$ l'ev des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π périodiques, cpm et régulières. Notons que $\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{D}$.

2) <u>Produit scalaire hermitien</u> : On muni $\mathcal{D}$ du produit scalaire hermitien $(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\, dt$.

Alors $(\mathcal{D}, (\cdot|\cdot))$ est un EPC.

3) <u>Propriétés</u> : . La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale dans $\mathcal{D}$, avec $e_n : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{int}$.

. On définit $\mathrm{Vect}((e_n)_{n \in \mathbb{Z}})$ le sev des "polynômes trigonométriques", noté $\mathcal{P}$.

. Si $f \in \mathcal{D}$, alors on a : $c_n(f) = (e_n | f)$.

. Alors : $S_N f(t) = \sum_{n=-N}^{+N} (e_n | f) e_n$. C'est donc la projection orthogonale sur $\mathcal{P}_N = \mathrm{vect}(e_{-N}, \dots, e_N)$.

4) <u>Inégalité de Bessel</u> : . $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|^2$, avec $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt$.

. Si $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, l'inégalité est conservée. <u>Aussi</u> : $\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} \leq \|f\|^2$.

(V) Convergence Normale

. Soit f 2π périodique, de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue sur $\mathbb{R}$ et C^1_{pm} sur $\mathbb{R}$. Alors : $\begin{cases} \cdot \text{ la famille } (c_n(f))_{\mathbb{Z}} \text{ est sommable} \\ \cdot \text{ la série de Fourier est NCV sur } \mathbb{R} \\ \cdot \text{ sa somme est } f \end{cases}$

Donc la série de Fourier de f est NCV vers f sur $\mathbb{R}$.

VI) Convergence quadratique

1) **Comparaison $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$** : On sait que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$, donc NCV $\Rightarrow$ UCV $\Rightarrow$ QCV.

. Donc, si f est 2π périodique, C^1_{pm} et C^0 sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier CV quadratiquement vers f. $\lim_{N \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$.

---

2) **Densités** : . Toute fonction $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions 2π périodiques et de classe C^1 (Théorème de Weierstrass).

Donc : $\overline{\mathcal{C}^1_{2\pi}} \supset \mathcal{C}_{2\pi}$ et même $\overline{\mathcal{C}^1_{2\pi}} = \mathcal{C}_{2\pi}$

. $\mathcal{C}_{2\pi}$ est partout dense dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_2)$. Ou encore, toute $f \in \mathcal{D}$ est limite quadratique d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Donc : $\overline{\mathcal{C}^1_{2\pi}} = \mathcal{D}$.

---

3) **Théorème de la CV quadratique** : $\forall f \in \mathcal{D}$, $\lim_{N \infty} \|S_N f - f\|_2 = 0$. Donc $(S_N f)_{\sigma}$ CV vers f dans $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_2)$.

---

4) **Identité de Parseval** : Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Alors : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$, et aussi : $\frac{|a_0(f)|^2}{4} + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt$

---

5) **Conséquences de Parseval** :

a/ **Sur $\mathcal{D}$** : L'application $\alpha \begin{cases} \mathcal{D} \to \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \mapsto (c_n(f))_{\mathbb{Z}} = \hat{f} \end{cases}$ est linéaire et conserve la norme hermitienne. Elle est injective et NON surjective.

b/ **Polarisation** : $\forall f, g \in \mathcal{D}$, $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) \, dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g)$

c/ **Propriété** : Si $f \in \mathcal{D}$ et si tous les coefficients de Fourier sont nuls, alors f est nulle. De même, si les coeffs de f et g sont égaux alors $f = g \in \mathcal{D}$.

d/ **Conséquence** : . Si une série trigo est UCV, alors elle est la série de fourier de sa somme.

. Si $f \in \mathcal{D}$, et si sa série de Fourier est UCV, alors f en est la somme.