Réduction des endomorphismes en dim finie

(I) Théorème de Cayley-Hamilton

1) **Théorème** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, de poly caractéristique P_u. Alors $P_u(u) = 0$, ie : π_u / P_u.

2) **Conséquence** : $d^\circ \pi_u \leq n$ et $\dim K[u] \leq n$.

(II) Trigonalisation

1) **Définition** : . u est trigonalisable $\Leftrightarrow \exists \beta = (e_1, \dots, e_n)$ tq $mat(u,\beta)$ soit triangulaire supérieure.
. A est trigonalisable $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K)$ tq $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

. **Remarque** : Si $mat(u,\beta)$ triang. sup., alors on pose $F_i = vect(e_1, \dots, e_i)$ et $u(F_i) \subset F_i$. Les F_i sont u stables.
. **Définition** : les F_i vérifient $F_0 = \{0\} \subset F_1 \subset \dots \subset F_n$ et $\dim F_i = i$. Une telle suite de sev est un drapeau.
. **Proposition** : u trigonalisable $\Leftrightarrow$ on possède un drapeau de sev stables par u.

2) **Théorème de trigonalisation** : $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés sont équivalentes : $\begin{cases} . \ u \text{ trigonalisable} \\ .. \ P_u \text{ scindé dans } K[X] \end{cases}$ $\begin{cases} \therefore \ \exists \text{ un polynôme scindé dans } K[X] \text{ annulateur} \\ :: \ \pi_u \text{ est scindé dans } K[X] \end{cases}$

3) **Conséquences**

a/ **Remarque** : D'après le théorème, on a : P_u scindé sur $K[X] \Leftrightarrow \pi_u$ scindé sur $K[X]$.

b/ **Cas particulier** : Dans $K = \mathbb{C}$, algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.

c/ **Calculs de Traces** : Soit u trigonalisable. $mat(u,\beta) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $mat(u^k,\beta) = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$. Donc : $P_{M}(u) = \begin{bmatrix} P(\lambda_1) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{bmatrix}$.

Donc : $\begin{cases} Tr(P(u)) = \sum_i P(\lambda_i) \\ \det(P(u)) = \prod_i P(\lambda_i) \end{cases}$ Pour u trigonalisable !

4) **Calculs pratiques en dim 2 et 3**

a/ **Dimension 2** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u scindé. On peut toujours trouver un vecteur propre e_1. On complète en une base $\beta = (e_1, e_2)$.
Alors $mat(u,\beta) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$ triang. sup. Notons que si u n'est pas diag^{ble}, alors la VP est double. Alors $mat(u,\beta') = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

b/ **Dimension 3** : Si on peut trouver deux vecteurs propres e_1 et e_2 linéairement indépendants (pour P_u scindé), on complète en une base $\beta = (e_1, e_2, e_3)$. Alors $mat(u,\beta) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix}$.
. Sinon, elle possède une seule VP λ, telle que $\dim E_u(\lambda) = 1$. Soit $v = u - \lambda Id$, v est nilpotent car $mat(v,\beta') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Donc $v^3 = 0$ et $v^2 \neq 0$. Alors $\exists x_0$ tq $v^2(x_0) \neq 0$, ce qui nous fournit une base $(v^2(x_0), v(x_0), x_0) = \beta$. Et $mat(v,\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
d'où : $mat(u,\beta) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

5) **Application aux endomorphismes nilpotents** : $u \in \mathcal{L}(E)$, $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

. **Propriété**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, équivalence entre : $\begin{cases} . \ u \text{ nilpotent d'indice } p \\ .. \ \pi_u \text{ de la forme } X^p \end{cases}$ $\begin{cases} \therefore \ \exists \beta \text{ base de } E \text{ tq } mat(u,\beta) \text{ triang. sup. stricte.} \\ :: \ P_u(X) = (-X)^n = (-1)^n X^n \end{cases}$

(III) Sous-espaces caractéristiques

1) **Définition** : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u scindé sur K. $P_u(X) = \prod_{i=1}^{q} (\lambda_i - X)^{r_i}$. $E = \bigoplus_{i=1}^{q} Ker(u - \lambda_i Id)^{r_i} = \bigoplus_{i=1}^{q} F_u(\lambda_i)$
. On dit que $F_u(\lambda_i)$ est le sous espace caractéristique de u associé à λ_i.

2) **Etude de l'endomorphisme induit** : Soit $\lambda \in Sp(u)$. $F_u(\lambda)$ le sous espace caract. associé à λ. Alors $(u - \lambda Id)|_{F_u(\lambda)}$ est nilpotent d'indice $\leq r(\lambda)$. Et nous avons : $mat(u|_{F_u(\lambda)}, \beta_\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \updownarrow \dim F_u(\lambda)$. Notons que $Sp(u|_{F_u(\lambda)}) = \{\lambda\}$.

3) **Application à la matrice de u** : $mat(u,\beta) = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \ A_n \end{bmatrix}$ avec $A_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}$, et $\beta = \beta_1 \sqcup \beta_2 \sqcup \dots \sqcup \beta_q$.

4) **Dimension des sous espaces caractéristiques** : $\forall i = 1 \dots q$, $\dim F_u(\lambda_i) = r(\lambda_i)$

5) **Décomposition ($d+n$) ou de Dunford** : Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u scindé. Il existe un unique couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que
. d diagonale .. n nilpotent ... $d + n = u$ .... d et n commutent

(IV) Applications

1) **Calcul des puissances d'une matrice**

a/ **Rappels** : . Si $A = \lambda I + N$, avec N nilpotente d'indice p, alors $A^k = (\lambda I + N)^k = \sum_{l=0}^{p-1} C_k^l \lambda^{k-l} N^l$.
.. Polynôme annulateur, alors $X^k = P.Q_k + R_k$ et donc : $A^k = \underset{=0}{P(A)}Q(A) + R_k(A) = R_k(A)$.

b/ **Cas général** : P_A scindé, on utilise une diag. ou une trigonale associée aux se caract.
. Si A est diag^{ble}, $\exists P \ / \ P^{-1}AP = D$. Donc, $A = PDP^{-1}$ et $A^k = PD^kP^{-1}$.
.. Si A n'est pas diag^{ble}, $\exists P \ / \ P^{-1}AP = A' = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_q \end{bmatrix}$ avec $A_i = \lambda_i I_{r_i} + N_i$. Alors : $A^k = PA'^kP^{-1}$, avec $A'^k = \begin{bmatrix} A_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_q^k \end{bmatrix}$
et $A_i^k = \sum_{l=0}^{r_i - 1} \lambda_i^{k-l} N_i^l C_k^l$.

c/ **Pour les endomorphismes** : $u \in \mathcal{L}(E)$ et P_u scindé.
. Si u diag^{ble}, alors $E = E_u(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_u(\lambda_q)$. Donc $u = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_q p_q$, avec p_i associé à $E_u(\lambda_i)$.
donc $u^k = \lambda_1^k p_1 + \dots + \lambda_q^k p_q$, car $p_i \in K[u]$.
.. Si u non diag^{ble}, $E = F_u(\lambda_1) \oplus \dots \oplus F_u(\lambda_q)$. Nommons $p_1, \dots, p_q$ les projecteurs associés. $u^k = (u - \lambda_i Id + \lambda_i Id)^k = \sum_{l=0}^{k} C_k^l (u - \lambda_i Id)^l \lambda_i^{k-l}$
et : $u^k = \sum_{i=1}^{q} u^k \circ p_i = \sum_{i=1}^{q} \left[\sum_{l=0}^{r_i - 1} C_k^l \lambda_i^{k-l} (u - \lambda_i Id)^l \circ p_i \right]$, pour $k \geq \max(r_i - 1)$.

2) Rayon spectral

a/ Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E un $\mathbb{C}$ev. $\begin{cases} \cdot \text{ Rayon spectral de } A : & \rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Sp A} |\lambda| \\ \cdot\cdot \text{ Rayon spectral de } u : & \rho(u) = \max\limits_{\lambda \in Sp u} |\lambda| \end{cases}$

b/ Théorème : $\lim\limits_{k \infty} A^k = 0 \iff \rho(A) < 1$

3) Sous-espaces stables d'un endomorphisme diag^{ble} : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diag^{ble}.

. Propriété : F est u-stable $\iff \exists E_1', \dots, E_q'$ tq $E_i' \subset E_u(\lambda_i)$, et $F = E_1' \oplus \dots \oplus E_q'$. ⚠ u est diag^{ble}.

4) Application aux récurrences linéaires

a/ Rappel : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Les suites (u_n) de K qui vérifient une récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_0 u_n$. (1).
On note $\mathcal{E} = K^{\mathbb{N}}$ et $\mathcal{S} = \{(u_n) / u \text{ vérifie } (1)\}$. On sait que $\varphi : \begin{cases} \mathcal{S} \longrightarrow K^p \\ u \longmapsto (u_0, \dots, u_{p-1}) \end{cases}$ est un isomorphisme d'ev, d'où $\dim \mathcal{S} = p$.
. On cherche les éléments de $\mathcal{S}$ de la forme $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $r \neq 0$.
On trouve que $(r^n) \in \mathcal{S} \iff P(r) = 0$ avec $P = X^p - a_{p-1} X^{p-1} - \dots - a_0$. Si P possède p racines 2 à 2 distinctes $(r_1, \dots, r_p)$ alors $(R_1, \dots, R_p)$ avec $R_i = (r_i^n)$ forme une base de $\mathcal{S}$. Donc, $\mathcal{S} = \{\lambda_1 R_1 + \dots + \lambda_p R_p / (\lambda_1 \dots \lambda_p) \in K^p\}$.

b/ Cas général : Supposons P scindé sur K. $P(x) = \prod_{i=1}^{q} (x - r_i)^{m_i}$ avec $\begin{cases} r_i \text{ 2 à 2 distincts} \\ m_i \geq 1 \end{cases}$. Soit $f : \begin{array}{l} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ u \mapsto f(u) = v \end{array}$ où $v_n = u_{n+1}$.
. La fonction f est le "shift". Alors :
$u_{n+p} - a_{p-1} u_{n+p-1} - \dots - a_1 u_{n+1} - a_0 u_n = \left[f^p(u) - a_{p-1} f^{p-1}(u) - \dots - a_0 u \right]_n = 0. \iff P(f)(u) = 0.$
Donc, $\operatorname{Ker} P(f) = \mathcal{S}$.
. Le théorème de décomposition des noyaux donne : $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker}(f - r_i Id)^{m_i}$
. Propriété : $\operatorname{Ker}(f - r\, Id)^m = \{ u = (r^n Q(n))_{n \in \mathbb{N}}, \text{ où } Q \in K_{m-1}[X] \}$.
. Les éléments de $\mathcal{S}$ sont donc les suites :
$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $u_n = Q_1(n) r_1^n + \dots + Q_q(n) r_q^n$, avec $Q_i \in K_{m_i - 1}[X]$.

5) Endomorphismes cycliques

a/ Définition : $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n$. u cyclique $\iff \exists a \in E / (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ base de E.
. Dans cette base, la matrice de u est : $\operatorname{mat}(u, B_a) = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$ si $u^n(a) = \alpha_0 a + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(a)$.
On la nomme matrice de Frobenius ou matrice Compagnon.

b/ Exemples :
. u nilpotent d'indice n.
.. u diag^{ble} : u cyclique $\iff n$ VP 2 à 2 distinctes.

c/ Polynôme minimal : Si u cyclique, alors $d°\Pi_u = n$ et $\Pi_u = X^n - \alpha_{n-1} X^{n-1} - \dots - \alpha_1 X - \alpha_0$
. Corollaire : $\dim K[u] = n$ pour u cyclique.

d/ Commutant de u : . Si u est cyclique, alors $\mathcal{C}(u) = K[u]$
.. Si u est cyclique, $\dim \mathcal{C}(u) = n$.

e/ Polynôme caractéristique : $P_u(x) = (-1)^n \Pi_u(x)$.

f/ Dimension des sep : Si u est cyclique, alors $\forall \lambda \in Sp(u)$, $\dim E_u(\lambda) = 1$.