Réduction des endomorphismes autoadjoints

MP*

I) Théorème de réduction

1) Polynôme caractéristique : Le poly. caract. d'un endomorphisme autoadjoint, ou d'une matrice symétrique réelle ou hermitienne complexe est à coefficients réels et scindé dans $\mathbb{R}$.

2) Sous-espaces propres : Soit u autoadjoint. Si les V.P de u, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, sont deux-à-deux distinctes, alors les $E_u(\lambda_i)$ sont deux-à-deux orthogonaux. $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_p \Rightarrow E_u(\lambda_1) \overset{\perp}{\oplus} E_u(\lambda_2) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_u(\lambda_p)$.

3) Théorème de réduction :
- Tout endomorphisme autoadjoint est dig^{ble} dans une BON de E propre pour u.
- Toute matrice sym. réelle ou hermitienne complexe est diag^{ble}, et $\exists P$ unitaire ou orthogonale tq $P^{-1}AP = D$ diagonale réelle.

II) Premières applications

1) Quotient de Rayleigh :

a/ Définition : Soit u autoadjoint. $\forall x \in E$, on définit le Quotient de Rayleigh : $R_u(x) = \dfrac{(x|u(x))}{(x|x)}$.

b/ Dans une BON : Si on se place dans une BON u-propre, alors : $(x|u(x)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$, et donc : $R_u(x) = \dfrac{\sum_1^n \lambda_i |x_i|^2}{\sum_1^n |x_i|^2} \in \mathbb{R}$.

b/ Propriété : $\sup_{x\in E, x\neq 0} R_u(x) = \max_i \lambda_i$ et $\inf_{x\in E, x\neq 0} R_u(x) = \min_i \lambda_i$.

2) Endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs.

a/ Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, autoadjoint. u est positif $\Leftrightarrow \forall x\in E, (x|u(x)) \geq 0$. u défini positif $\Leftrightarrow \forall x \neq 0, (x|u(x)) > 0$.

b/ Propriété : Nous avons les deux équivalence :
u positif $\Leftrightarrow$ A positive $\Leftrightarrow$ $Sp\,u \subset \mathbb{R}^+$
u défini $\geq 0 \Leftrightarrow$ A déf. $\geq 0 \Leftrightarrow Sp\,u \subset \mathbb{R}^{+*}$
avec $A = mat(u, BON)$.

3) Calcul de $|||u|||$ lorsque u est autoadjoint : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors $|||u||| = \rho(u) = \sup_{x\in E, x\neq 0} |R_u(x)|$

4) Calcul de $|||u|||$ pour u quelconque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qcq. Alors $|||u||| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$

III) Application aux FQ et FQ hermitiennes.

1) Relation entre FQ et endomorphisme autoadjoint :

a/ Relation : Soit u autoadjoint. $q_u : x \mapsto (x|u(x))$ est une FQ ou Q Hermitienne.

b/ Dans une BON : $A = mat(u, B)$, alors $mat(u,B) = mat(q_u, B) = A$ dans une BON.

c/ Propriété : L'application $\mathcal{E} : u \in \mathcal{S}(E) \longmapsto q_u \in Q$ est un isomorphisme.
Propriété : $\forall q \in Q(E), \exists! u \in \mathcal{S}(E) \;/\; \forall x,\ q(x) = (x|u(x))$.

2) Théorème de réduction d'une FQ dans une BON.

- Théorème : Soit q une FQ sur E euclidien ou hermitien. Il existe une base de E à la fois ON pour le produit scalaire de E, et q-orthogonale.
- Définition : Ainsi, les valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_n$ de u associées à q s'appellent les valeurs spectrales de q.
Les directions propres associées à B ON et q-orthogonale sont les directions principales de q.

3) Théorème de la réduction simultanée

a/ Théorème : Soit E un $\mathbb{R}$ev de dim finie. Soit deux formes quadratiques q et q' de E, avec q déf. ≥ 0. Alors il existe une base B de E qui est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.

b/ Reformulation matricielle : Soient A et A' deux matrices sym. réelles, et A déf ≥ 0. Alors $\exists Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tq : $\begin{cases} {}^tQAQ = I_n \\ {}^tQA'Q = D \end{cases}$
Attention ! Q n'est pas orthogonale !

4) Application aux FQ réelles.

- Soit E un $\mathbb{R}$ev de dim finie, et soit $q \in Q(E)$. Alors, si $A = mat(q, B)$ avec B qcq : $\exists P \in O(E) \;/\; {}^tPAP = P^{-1}AP = D$. P orthogonale !
- Signature de q : On peut la déterminer à l'aide de la diagonalisation de A, car $sgn(q) = (s,t)$ où $\begin{cases} s = card\,(SpA) \cap \mathbb{R}^+_* \\ t = card\,(SpA) \cap \mathbb{R}^-_* \end{cases}$

IV) Décomposition polaire (K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

1) Racine carrée d'un endom hermitien ≥ 0 : Soit h un endom hermitien positif de E. $\exists!$ endom hermitien positif k de E telque : $h = k \circ k$

2) Décomposition polaire :

a/ Version endomorphisme : Soit E hermitien, et soit $f \in GL(E)$. $\exists!$ couple (u, h) tel que : $\begin{cases} u \text{ unitaire} \\ h \text{ hermitien déf} \geq 0 \\ f = u \circ h \end{cases}$

b/ Version matricielle : Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. $\exists!$ couple (U, H) tel que : $\begin{cases} U \text{ unitaire} \\ H \text{ hermitienne déf} \geq 0 \\ A = U.H \end{cases}$

3) Remarques : $U(E)$ est le gpe unitaire de E, et $H^{++}(E)$ est l'ensemble des endom hermitiens déf ≥ 0 de E.
$$\begin{aligned} U(E) \times H^{++}(E) &\xrightarrow{\ \gamma\ } GL(E) \\ (u, h) &\longmapsto u \circ h \end{aligned}$$
Le théorème nous dit que γ est bijective et continue.

V) Complément : réduction des endom normaux dans un espace hermitien

1) Rappel : Dans E hermitien, u normal $\Leftrightarrow u^* u = u u^*$.

2) Lemme : Tout endomorphisme d'un espace hermitien se trigonalise dans une BON.

3) Lemme : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et normale. Alors A est diagonale.

4) Théorème de réduction : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, E hermitien et u normal. Alors $\exists$ une BON de E qui soit aussi u-propre ; ie : u se diagonalise dans BON

5) Forme matricielle : Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est normale, alors $\exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP = D$ diagonale.

Remarque : u normal $\Leftrightarrow$ $\exists$ une BON qui soit u-propre.

VI Complément : déterminant de Gram.

1) Définition : Soit E un EPR ou EPC, et soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On introduit la matrice de Gram de $(x_1 \dots x_p)$: $\mathrm{Gram}(x_1 \dots x_p) = \left[(x_i|x_j)\right]_{ij}$
Le déterminant de cette matrice sym réelle ou hermitienne est le déterminant de Gram : $G(x_1 \dots x_p)$.

2) Propriétés : . Si $(x_1 \dots x_p)$ libre, alors $G(x_1 \dots x_p) > 0$.
.. $(x_1 \dots x_p)$ liée $\Leftrightarrow$ $G(x_1 \dots x_p) = 0$
... $G(x_1 \dots x_{p-1}, x_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i) = G(x_1 \dots x_p)$.

3) Application aux calculs de distances : Soit $F \subset E$. $d(x,F)^2 = \dfrac{G(e_1 \dots e_p, x)}{G(e_1 \dots e_p)}$ avec $(e_1 \dots e_p)$ une base quelconque de F.

4) Cas où $\dim E = p$: . $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_p)$ et $\mathcal{B}' = (e_1' \dots e_p')$ deux bases de E. Soit $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$. Alors $G(e_1' \dots e_p') = |\det P|^2 \cdot G(e_1 \dots e_p)$.
.. De plus, si $\mathcal{B}$ est ON : $G(e_1' \dots e_p') = |\det P|^2$.

5) Application au produit vectoriel : Soit $\dim E = 3$ orienté. Soient u et v dans E.
. On a : $G(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \cdot G(u,v) = \|u \wedge v\|^4$
. Mais aussi, on obtient l'identité de Lagrange : $(u|v)^2 + \|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$