Rédaction des endomorphismes

I Sous-espaces stables

1) Définition : $F \subset E$. F stable par $u \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow u(F) \subset F$

2) Matriciellement : $\dim E < \infty$ et $F \subset E$. β une base de E avec $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1, \dots, e_p)$ base de F.

F stable par $u \Leftrightarrow \mathrm{mat}(u, \beta) = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_p \end{array} \end{array}$. De plus, si $E = F_1 \oplus F_2$ avec F_1 et F_2 u stables, alors : $\mathrm{mat}(u, \beta') = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \begin{array}{c} F_1 \\ F_2 \end{array} \end{array}$

3) Exemples :

a/ homothétie : $u = \lambda \mathrm{Id}$. Tout sev de E est u stable.

b/ Général : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si (Kx_0) est u stable, alors $u(x_0) = \lambda x_0$. On dit que x_0 est un vecteur propre de u.

c/ Sev monogène : $E_a = \mathrm{Vect}(a, u(a), \dots, u^k(a), \dots)$ est stable par u. C'est le sous espace monogène engendré par a.

d/ Commutants : Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$. $u \circ v = v \circ u \Rightarrow \mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont u stables.

II Polynômes de l'endomorphisme u

1) Rappels

a/ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$: $\varphi_u : \begin{array}{l} K[X] \to \mathcal{L}(E) \\ P \mapsto P(u) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres. $\mathrm{Im}\, \varphi_u = K[u]$.

b/ Noyau : $\mathrm{Ker}\, \varphi_u$ est un idéal de $K[X]$. $\mathrm{Ker}\, \varphi_u = (\pi_u)$ avec : $\begin{cases} \cdot\ \pi_u = 0 \to \mathrm{Ker}\, \varphi_u = \{0\}. \\ \cdot\cdot\ \pi_u \text{ normalisé est le polynôme minimal.} \end{cases}$

. $P \in \mathrm{Ker}\, \varphi_u \Leftrightarrow \pi_u / P \Leftrightarrow P(u) = 0$

. Si $\dim E$ est finie, $\pi(u) \neq 0$.

c/ Propriété : $\dim K[u] = d^\circ \pi_u$.

2) Polynôme minimal et endomorphisme induit : F u stable et $\pi_u \neq 0$. Alors $\pi_{u_F} \neq 0$ et π_{u_F} / π_u.

3) Théorème de décomposition des noyaux

a/ Théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$, P et Q premiers entre eux. $\mathrm{Ker}\, PQ(u) = \mathrm{Ker}\, P(u) \oplus \mathrm{Ker}\, Q(u)$.

b/ Généralisation : Théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_q \in K[X]$, deux-à-deux premiers entre eux. $P = P_1 \dots P_q$.

$\mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(u)$.

c/ Cas particulier important : Si P annulateur de u, $P(u) = 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, P(u) = E$. D'où : $E = \mathrm{Ker}\, P_1(u) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}\, P_q(u)$.

d/ Complément : $P \in K[X]$, $P = P_1 \dots P_q$ premiers entre eux. Soit p_i les projecteurs associés à cette décomposition sur les $\mathrm{Ker}\, P_i(u)$

. Propriété : $\forall i$, $p_i \in K[u]$.

III Eléments propres

1) Définition :

a/ Valeur propre : λ est une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id})$ n'est pas injectif $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

b/ Vecteur propre : $\lambda \in Sp(u)$. x vecteur propre de $u \Leftrightarrow x \neq 0$ et (Kx) stable par u.

c/ Noyaux : $E_u(\lambda) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ est $\neq \{0\}$ si λ est VP de u. C'est le sous espace propre associé à λ.

d/ Spectre : $Sp(u)$ est l'ens. des VP associées à u.

e/ Dimension finie : $\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id})$ non surjective $\Leftrightarrow (u - \lambda \mathrm{Id})$ non bijectif ou non injective $\Leftrightarrow \det(u - \lambda \mathrm{Id}) = 0$

$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$.

f/ Matrice : $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)$ non inversible.

g/ Dimension finie : $\dim E_u(\lambda) = \dim E - rg(u - \lambda \mathrm{Id})$.

2) Somme directe des sous espaces propres : Théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u. Alors les $E_u(\lambda_i)$ sont en somme directe : $E_u(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E_u(\lambda_q) \subset E$.

3) Polynôme minimal et valeurs propres : Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, admettant le polynôme minimal $\pi_u \neq 0$. Soit $\lambda \in K$.

$\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \pi_u(\lambda) = 0$. Donc les VP sont les racines de π_u.

. Rq : Si $\lambda \in Sp(u)$ et x vect. propre, alors : $P(u)(x) = P(\lambda).x$.

IV Polynôme caractéristique (en dim $< \infty$)

1) Définition :

a/ Notation : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. $\det(A - XI_n) = P_A(X)$ ou $\chi_A(X)$ est le polynôme caractéristique de A.

b/ Propriété : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

c/ Définition : $P_A(X)$ ne dépend pas de β et dépend donc seulement de u. On le note $P_u(X)$. C'est le polynôme caract. de u.

d/ Remarque : On rencontre parfois la définition $\det(XI_n - A)$. Alors : $\det(A - XI_n) = (-1)^n \det(XI_n - A)$.

2) Description de $P_A(X)$

a/ Degré : il est de n, $(-1)^n X^n$

b/ Terme constant : $P_A(0) = \det A$

c/ Autres termes : $P_A(X) = \sum_{p=0}^{n} \left[\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_p \le n} \det(A_{j_1 \dots j_p}) \right] (-1)^p X^p$, avec $A_{j_1 \dots j_p}$ déduite de A en supprimant les lignes et colonnes d'indices $j_1 \dots j_p$.

Donc :

$$P_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \mathrm{Tr} A . X^{n-1} + \dots + (-\mathrm{Tr}(\mathrm{com} A)) X + \det A .$$

3) Utilisation du polynôme caractéristique :

a/ Racines : $\forall \lambda \in K$, $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0$. Notons que des ordres de multiplicité peuvent intervenir.

b/ Propriété : Si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme possède au moins une valeur propre ; de même si $K = \mathbb{R}$ et n impair.

c/ Polynôme scindé : Si P_A ou P_u scindé dans $K[X]$ alors n VP dans K (distinctes ou non). $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}\, A$ et $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$.

4) Endomorphismes induits : $u \in \mathcal{L}(E)$, $F \subset E$ tq F est u-stable. Alors P_{u_F} / P_u

5) Dimension de $E(\lambda)$ et ordre de multiplicité de λ : $\left\{ \begin{array}{l} m(\lambda) = \dim E_u(\lambda) = n - \mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{Id}) \\ r(\lambda) = \text{ordre de multiplicité de } \lambda \text{ dans } P_u \end{array} \right.$ → Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in Sp(u)$.

. Théorème : $\forall \lambda \in Sp(u)$, $r(\lambda) \geq m(\lambda) \geq 1$.

.. Cas particulier : si l'ordre de multiplicité est simple, alors $r(\lambda) = m(\lambda) = 1$.

V Diagonalisation

1) Définition : . u est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $\exists$ une base de E u-propre

.. $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est diag^{ble} $\Leftrightarrow$ $\exists P \in GL_n(K)$ / $P^{-1}AP$ est diagonale.

2) Caractérisation des sous-espaces propres : $u \in \mathcal{L}(E)$ et $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$ deux à deux distincts. $F = \bigoplus_{i=1}^{q} E_u(\lambda)$

. Théorème : u diagonalisable $\Leftrightarrow F = E \Leftrightarrow \dim E = \sum_{i=1}^{q} \dim E_u(\lambda_i)$.

. Corollaire : Si $\dim E = n$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n VP distinctes 2 à 2, alors u est diagonalisable, et chaque sous espace propre est une droite vectorielle.

3) Polynôme minimal et polynômes annulateurs

a/ Théorème : $u \in \mathcal{L}(E)$ de poly minimal π_u. u diag^{ble} $\Leftrightarrow$ π_u scindé sur $K[X]$ et ses racines sont simples
$\Leftrightarrow$ $\exists$ un polynôme annulateur de u, scindé sur K à racines simples.

b/ Application aux endomorphismes induits : Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diag^{ble} et $F \subset E$ u stable. Alors u_F est diag^{ble}.

4) Utilisation du polynôme caractéristique

. Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, de poly caract. P_u, et de spectre $\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$.
u diag^{ble} $\Leftrightarrow$ P_u scindé sur $K[X]$ et $\forall i = 1..q$, $r(\lambda_i) = m(\lambda_i)$.