Intégrales sur un segment

I Intégrale des fonctions en escalier

1) **Définition** : Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],E)$ avec E evn complet. Soit δ une subdivision adaptée à f. Alors : $I(f,\delta) = \int_a^b f = \sum_{i=0}^{p-1} (a_{i+1}-a_i)\lambda_i$.

2) **Propriétés** :

a/ Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

b/ Modification en un point : cela n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

c/ Linéarité : $\varphi : f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire

d/ Inégalité de la norme : $\|\int_a^b f\| \leq \int_a^b \|f\|$

e/ Continuité : $I : f \mapsto I(f)$ est C^0, $\mathcal{E}$ étant muni de N_∞, car I linéaire et bornée.

f/ Cas où $E=\mathbb{R}$: Alors I est une forme linéaire positive, ie $f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0$.

II Intégrale des fonctions cpm

1) **Définition** : Rappelons que dans $(\mathcal{B}([a,b],E),N_\infty)$ qui est complet, $\mathcal{E}$ est partout dense dans $\mathcal{C}_{mor}$. $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{C}_{mor}$. Alors, si $\varphi_n \xrightarrow{\to} f \in \mathcal{C}_{mor}$, $I(f) = \lim_{n\infty} I(\varphi_n)$

2) **Théorème** : Si $(f_n) \in \mathcal{C}_{mor}^{\mathbb{N}}$ et $\lim_{n\infty} f_n \rightrightarrows f \in \mathcal{C}_{mor}$, alors $\lim_{n\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$.

3) **Propriétés** : mêmes propriétés que précédemment, mais appliquées à $\mathcal{C}_{mor}$.

4) **Cas où $E=\mathbb{R}$** :

a/ Positivité de l'intégrale : $f \in \mathcal{C}_{mor}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f \geq 0$. De même, si $f \geq g$, alors $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

b/ Inégalité stricte : f cpm sur $[a,b]$ et $f \geq 0$. Alors, si $f(x_0) > 0$ et f C^0 en x_0, on a : $\int_a^b f > 0$.

c/ Théorème de la moyenne : Soit f tq $\forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Alors $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

d/ Formule de la moyenne : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue, alors $\exists c \in [a,b] \,/\, \int_a^b f = (b-a)f(c)$.

5) **Image par une appl. linéaire (continue)**

a/ Propriété : $f \in \mathcal{C}_{mor}([a,b],E)$ et $u \in \mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ en dim finies. Alors $(u \circ f) \in \mathcal{C}_{mor}$ et $\int_a^b u \circ f = u\left(\int_a^b f\right)$.

b/ Fonctions à valeur dans un produit : $E = E_1 \times E_2$ de dims finies. Soit $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$, alors $\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \int_a^b f_2\right)$.

c/ E rapporté à une base : $f(t) = \sum_1^n f_i(t)e_i$, alors $\int_a^b f = \sum_1^n \left(\int_a^b f_i\right)e_i$.

6) **Applications bilinéaires, intégration**

a/ Propriété : Soit $B : E \times F \to G$, bilinéaire continue. $E,F,$ et G de dims finies. Soit $h : t \mapsto B(f(t),g(t)) \in G$. Si f,g sont cpm, alors h est aussi cpm et intégrable. Mais, pas de formule pour $\int_a^b B(f,g)$ ...

b/ Cas où $E=\mathbb{R}$: Théorème de la moyenne généralisé : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, cpm, tq $\exists m, M \,/\, \forall x \in [a,b]$, $m \leq f(x) \leq M$.
Et soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, cpm et $g \geq 0$. Alors : $m \int_a^b g \leq \int_a^b f.g \leq M \int_a^b g$.

c/ Majorations : Soit $f : [a,b] \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm, tq $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x)| \leq M$.
Soit $g : [a,b] \to E$, cpm.
alors $\left\| \int_a^b f(t)g(t)\,dt \right\| \leq M . \int_a^b \|g(t)\|\,dt$.

d/ Inégalité de Schwarz : Soit f et $g : [a,b] \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm. $\left(\int_a^b |f(t)g(t)|\,dt\right)^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2\,dt . \int_a^b |g(t)|^2\,dt$.

III Sommes de Riemann

1) **Définition** : Soit $f : [a,b] \to E$ cpm. $\delta = a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$, une subdiv. non adaptée à f à priori.
$\forall i = 0 \dots n-1$, $\xi_i \in [a_i, a_{i+1}]$. On pose $\xi = (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}) \in [a,b]^n$. Alors : $\sigma(f,\delta,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1}-a_i) f(\xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\xi_i)\,dt$
est une somme de Riemann pour f.

2) **Théorème** : $|\delta| = \max_i (a_{i+1}-a_i)$ est le "pas" de δ. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \,/\, \forall \delta, \forall \xi$, $|\delta| \leq \alpha \Rightarrow \left\|\sigma(f,\delta,\xi) - \int_a^b f\right\| \leq \varepsilon$.

3) **Applications, exemples**

a/ Classique : Soit $f : [a,b] \to E$, cpm, et soit δ_n la subdivision tq $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$, de pas $|\delta_n| = \frac{b-a}{n}$. Et $|\delta_n| \xrightarrow[n\infty]{} 0$.
Alors, $\lim_{n\infty} \sigma_n = \lim_{n\infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\right] = \int_a^b f$.

b/ Exemple : La série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. $S_{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ est donc la somme de Riemann de $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$, pour $t \in [0,1]$.
Donc $\lim_{n\infty} S_{2n} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.

c/ Calcul de $I(a)$: $I(a) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2a\cos x + a^2)\,dx$, avec $1 - 2a\cos x + a^2 = (a - e^{ix})(a - e^{-ix})$.
Alors : $\begin{cases} |a| < 1 \to I(a) = 0 \\ |a| > 1 \to I(a) = 4\pi \ln |a| \end{cases}$

Intégrales sur un intervalle qcq

I un intervalle réel non vide, $\mathring{I} \neq \emptyset$. $\Sigma(I)$ est l'ens. des segments de I.
On considère les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm sur I.

(I) Fonctions intégrables à valeurs réelles positives.

[A] Définitions et caractérisations

1) **Définition** : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$, cpm sur I. Si $\{\int_J f \,/\, J \in \Sigma(I)\}$ est majoré, alors f est int^{ble} sur I, et $\int_I f = \sup_{J \in \Sigma(I)} \int_J f \in \mathbb{R}^+$.

2) **Caractérisations** :

a/ **Propriété** : Soit (J_n) une suite $\uparrow$ de segments de I, $J_n \subset J_{n+1}$. $\bigcup_n J_n = I$. f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow \left(\int_{J_n} f\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

b/ **Propriété** : Soit $I = [a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On introduit $\varphi \begin{cases} [a,b[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$, avec $f \geq 0$ sur I.
Alors : f int^{ble} sur $I = [a,b[\Leftrightarrow \varphi$ majorée sur I. Dans ce cas, $\int_I f = \lim_{x \to b} \varphi(x) = \sup_I \varphi(x)$

3) **Exemples** : $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$; $\int_0^1 -\ln t \,dt = 1$; **Théorème** : $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est int^{ble} sur : $\begin{cases} [1,+\infty[\Leftrightarrow \alpha > 1 \\ ]0,1] \Leftrightarrow \alpha < 1 \end{cases}$; Généralement : $f(t) = \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ int^{ble} sur $[a,b[\Leftrightarrow \alpha < 1$

4) **Cohérence de la définition** : La définition de $\int_{I=[a,b]} f$ et cette définition coïncident.

[B] Propriétés

1) **Propriétés relatives à l'intervalle d'intégration**

- Si f est cpm et int^{ble} sur I, et que $I_1 \subset I$, alors $\int_{I_1} f \leq \int_I f$.
- Si $I \neq \mathring{I}$, et f cpm et positive, alors : f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow f$ int^{ble} sur $\mathring{I}$. Alors $\int_I f = \int_{\mathring{I}} f$.
- **Relation de Chasles** : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$, cpm, et $c \in \mathring{I}$. Soient $I_1 = I \cap]-\infty, c[$ et $I_2 = I \cap]c, +\infty[$. f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow f$ int^{ble} sur I_1 et I_2.
Dans ce cas, $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.

2) **Modification en un point** : La modification de f en un pt de I ne modifie pas la valeur de l'intégrale $\int_I f$.

3) **Additivité** : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, cpm, et int^{bles} sur I. Alors $(f + \lambda g)$ est int^{ble} sur I et $\int_I f + \lambda g = \int_I f + \lambda \int_I g$.

4) **Propriétés relatives à l'ordre**

a/ **Propriété** : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, cpm, et $f \leq g$ sur I. Alors g int^{ble} sur $I \Rightarrow f$ int^{ble} sur I. Dans ce cas, $\int_I g \geq \int_I f \geq 0$.

b/ **Propriété** : Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$, cpm, int^{ble} sur I, et $\exists x_0 \in I \,/\, \begin{cases} f(x_0) > 0 \\ f \ C^0 \text{ en } x_0 \end{cases}$, alors $\int_I f > 0$.

c/ **Corollaire** : Si f est C^0 et int^{ble} sur I, et positive, avec $\int_I f = 0$. Alors $f \equiv 0$.

[C] Etude de l'intégrabilité avec les relations de comparaison

1) **Domination** : Si $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, cpm sur I, et $I = [a,b[$. $f \underset{b}{=} \mathcal{O}(g)$. Alors : g int^{ble} sur $I \Rightarrow f$ int^{ble} sur I. Vrai aussi pour $f \underset{b}{=} o(g)$.

2) **Equivalence** : Soit $f, g : I \to \mathbb{R}^+$, cpm sur $I = [a,b[$. $f \underset{b}{\sim} g$. Alors f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow g$ int^{ble} sur I.

3) **Exemples** : $t^n e^{-t}$ est int^{ble} sur $[0,+\infty[$; Si I est borné, et si $f : I \to \mathbb{R}^+$ est cpm et bornée sur I, alors f int^{ble} sur I ; $\frac{1}{1+t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$ int^{ble} sur $[1,+\infty[$.

(II) Intégrales des fonctions réelles ou complexes.

[A] Définitions

1) **Définition de l'intégrabilité** : $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm sur I, est int^{ble} sur $I \Leftrightarrow |f|$ est int^{ble} sur I.

2) **Caractérisations**

a/ **Cas réel** : Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ et $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$. f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow f^+$ et f^- le sont.

b/ **Cas complexe** : Soit $f : I \to \mathbb{C}$, cpm. f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow \mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont int^{bles} sur I.

3) **Définition de l'intégrale**

a/ **Cas réel** : $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$

b/ **Cas complexe** : $\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \int_I \mathrm{Im}(f)$.

c/ **Utilisation d'une suite (J_n)** : Soit $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm et int^{ble} sur I. Soit $(J_n) \uparrow$ de réunion I. Alors $\int_I f = \lim_\infty \int_{J_n} f$.
Attention, ce n'est pas réciproque : l'existence d'une limite ne prouve pas l'intégrabilité, sauf pour $f \geq 0$.

d/ **Utilisation de $x \mapsto \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, quand $I = [a,b[$** : Soit $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm et int^{ble} sur I, avec $I = [a,b[$.
Alors, $\int_a^b f = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$. Mais l'existence d'une limite ne prouve pas l'intégrabilité.

[B] Propriétés

1) **Propriétés relatives à l'intervalle** : Si $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est int^{ble} sur I, et $I_1 \subset I$, alors f int^{ble} sur I_1.
Si $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est cpm, alors : f int^{ble} sur $I \Leftrightarrow f$ int^{ble} sur $\mathring{I}$. Dans ce cas, $\int_I f = \int_{\mathring{I}} f$.
Relation de Chasles habituelle...

2) **Propriétés habituelles** : modification en un point, linéarité, etc...

3) **Inégalité du module** : Soit $f : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm et int^{ble} sur I. Alors $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

4) **Comparaison** : Si $K = \mathbb{R}$, et que $f, g : I \to \mathbb{R}$ cpm et int^{bles} sur I. $f \leq g$ sur $I \Rightarrow \int_I f \leq \int_I g$.

5) **Inégalité de Schwarz** : Soit $f, g : I \to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, cpm sur I. Si $|f|^2$ et $|g|^2$ sont int^{bles} sur I, alors (fg) int^{ble} sur I et $\left|\int_I fg\right|^2 \leq \int_I |f|^2 \times \int_I |g|^2$

[C] Utilisation des relation de comparaison : On revient à $|f|$. On se rapporte aux (I) [C].

III) Intégrales semi-CV

1) <u>Définition</u> : On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est "semi CV" s'il existe $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)\,dt$.

2) <u>Exemple</u> : $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est semi-CV.

3) <u>Propriété</u> : Les intégrales semi-CV conservent la relation de Chasles et la linéarité.

IV) Méthodes de Calcul

. Décomposition en éléments simples.

.. Intégration par parties.

... Changement de variable.

V) Intégration des relations de comparaison.

1) <u>Cas de CV</u> : Soit $f : [a,b[\to K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $g : [a,b[\to \mathbb{R}^+$, toutes deux cpm. Soit g int^{ble} sur $[a,b[$.

Alors, si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ ou $f \underset{b^-}{=} o(g)$ ou $\exists l \in K^* \,/\, f \underset{b^-}{\sim} lg$

on a : $\int_x^b f \underset{b^-}{=} O\left(\int_x^b g\right)$ ou $\int_x^b f \underset{b^-}{=} o\left(\int_x^b g\right)$ ou $\int_x^b f \underset{b^-}{\sim} l.\int_x^b g$.

2) <u>Cas de DV</u> : Soit $f : I = [a,b[\to K$, et $g : I \to \mathbb{R}^+$, toutes deux cpm. Soit g <u>NON</u> int^{ble} sur I (ce qui veut dire $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x g(t)\,dt = +\infty$).

Alors, si $f \underset{b^-}{=} O(g)$ ou $f \underset{b^-}{=} o(g)$ ou $\exists l \in K^* \,/\, f \underset{b^-}{\sim} lg$

on a : $\int_a^x f \underset{b^-}{=} O\left(\int_a^x g\right)$ ou $\int_a^x f \underset{b^-}{=} o\left(\int_a^x g\right)$ ou $\int_a^x f \underset{b^-}{\sim} l \int_a^x g$.