Fonctions définies par des intégrales

Deux types d'intégrales : ① Fonction de leurs bornes : $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$
② Dépendant d'un param : $x \mapsto \int_a^b f(t,x)\,dt$

I) Intégrale fonction de sa borne

1) Théorème de continuité : Soit $I \subset \mathbb{R}$, $\mathring{I} \neq \emptyset$, un intervalle. Soit $f : I \to E$ cpm, et $a \in I$. $F : \begin{matrix} I \to E \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{matrix}$ est continue sur I.

2) Théorème de dérivabilité : Soit $I \subset \mathbb{R}$, $\mathring{I} \neq \emptyset$, un intervalle. Soit $f : I \to E$ cpm et C^0 en x_0. Alors F est D^1 en x_0, et $F'(x_0) = f(x_0)$.

3) Primitives : . Soit $f : I \to E$, continue sur I. Alors $g : I \to E$ est une primitive de f si $g' = f$ sur I. On remarque que g est C^1.
.. Soit $f : I \to E$, cpm sur I. Alors $g : I \to E$ est une primitive de f si g C^0 sur I, et $\forall x$ où f est C^0, $g'(x) = f(x)$. Alors g C^1_{pm}
... Si f est cpm sur I, alors $F : \begin{cases} I \to E \\ x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{cases}$ est C^0 sur I et D^1 en tout point où f est C^0. C'est donc une primitive de f.

4) Généralisation : Soit $f : I \to E$ cpm, et $\alpha, \beta : J \to I$, avec J un intervalle. Soit $G : \begin{matrix} J \to E \\ x \mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt \end{matrix}$, donc $G = F \circ \beta - F \circ \alpha$.
Alors : Si α et β sont C^0, G est aussi C^0. Si α et β sont D^1 sur J, et f C^0 sur I, alors G est D^1 sur J avec $G'(x) = \beta'(x) \cdot f(\beta(x)) - \alpha'(x)\, f(\alpha(x))$

II) Applications au calcul intégral

1) Théorème fondamental du calcul intégral : Soit $f : I \to E$ cpm sur I. Soit g une primitive de f sur I. Alors $\forall a, b \in I$, $\int_a^b f(t)\,dt = [g(x)]_a^b$.

2) Changement de variable

a/ Cas continu : Soit $f : I \to E$, C^0, et soit $\varphi : [c,d] \to I$ C^1 sur $[c,d]$. Alors : $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)\,du$.

b/ Exemple : Calcul de $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1+x}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

c/ Cas cpm : Soit $f : I \to E$, cpm sur I, et $\varphi : [c,d] \to E$ C^1 sur $[c,d]$ et strictement monotone. Alors $\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)\,dt = \int_c^d f \circ \varphi(u) \cdot \varphi'(u)\,du$.

d/ Applications usuelles : . $f : [-a,+a] \to E$, cpm et impaire (resp. paire). Alors $\int_{-a}^{+a} f = 0$ (resp. $\int_{-a}^{+a} f = 2\int_0^a f$).
.. $f : \mathbb{R} \to E$, T-périodique et cpm ; alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

3) Intégration par parties

a/ Théorème : Soient $f : [a,b] \to E$ et $g : [a,b] \to F$, toutes deux C^1. Et soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire. Alors $\int_a^b B(f', g) = [B(f,g)]_a^b - \int_a^b B(f, g')$.

b/ Exemple : Intégrale de Wallis. $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \cdot dt$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.
. Pour $n = 2p$: $I_0 = \pi/2$, $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 3\times 1}{2p\,(2p-2)\cdots 4\times 2} \times \frac{\pi}{2}$.
.. Pour $n = 2p+1$: $I_1 = 1$, $I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$.
... $\lim_{n\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$, donc $I_n \underset{\infty}{\sim} I_{n+1}$. Un équivalent de I_n est donc : $n I_n \cdot I_{n-1} = \frac{\pi}{2} = (n-1) I_{n-2} I_{n-1} \Rightarrow \lim_{\infty} n I_n^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_n \underset{\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

c/ Généralisation aux $f°$ cpm ou C^0 : Soit $f : I \to E$, C^1pm. On appellera Df toute fonction cpm sur I dont f est une primitive.
Théorème : Soit $f : [a,b] \to E$ et $g : [a,b] \to F$, toutes deux C^1pm et C^0. Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire. Alors : $\int_a^b B(Df, g) = [B(f,g)]_a^b - \int_a^b B(f, Dg)$.

d/ Extremum : Soit $f : [a,b] \to E$ et $g : [a,b] \to F$, de classes C^n. Alors : $\int_a^b B(f^{(n)}, g) = \left[B(f^{(n-1)}, g) - B(f^{(n-2)}, g') + \cdots + (-1)^{n-1} B(f, g^{(n-1)})\right]_a^b + (-1)^n \int_a^b B(f, g^{(n)})$.

4) Formule de Taylor avec reste intégral

a/ Théorème : Soit $f : [a,b] \to E$, C^{n+1}. Alors : $f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

b/ Application aux primitives $n^{\text{ièmes}}$: Soit $f : I \to E$ continue. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists g \mid g^{(n)} = f$. On prend les g tels que : $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$.
Alors, $\forall x \in I$, $g(x) = \cancel{g(a)} + \frac{x-a}{1!} \cancel{g'(a)} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cancel{g^{(n-1)}(a)} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} g^{(n)}(t)\,dt$.

III) Intégrales dépendant d'un paramètre

Soit X un evn, et E un evn de dim finie. $f : \begin{matrix} X \times [a,b] \longrightarrow E \\ (x,t) \longmapsto f(x,t) \end{matrix}$, telle que $t \mapsto f(x,t)$ soit cpm sur $[a,b]$, et ceci $\forall x \in X$.
On définit alors $F : \begin{matrix} X \to E \\ x \mapsto F(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt \end{matrix}$.

1) Théorème de continuité :

a/ Théorème : Soit $f : X \times [a,b] \to E$, continue sur $X \times [a,b]$; alors F est C^0 sur X.

b/ Corollaire : Soit $f : X \times I \to E$, X evn et I intervalle de $\mathbb{R}$, E evn de dim finie. On suppose f C^0 sur $X \times I$. Alors, $G : \begin{matrix} X \times I^2 \to E \\ (x,u,v) \mapsto \int_u^v f(x,t)\,dt \end{matrix}$ est C^0.

2) Théorème de la dérivation sous l'intégrale : Soit $X = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Et soit $f : I \times [a,b] \to E$ de dim finie, telle que $\begin{cases} \text{. } f \ C^0 \text{ sur } I \times [a,b] \\ \text{.. } f \text{ possède une } \frac{\partial f}{\partial x} \ C^0 \text{ sur } I \times [a,b] \end{cases}$
alors : $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt$ est D^1 sur I, et $\forall x \in I$, $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.
Donc, F' est C^0 et F est C^1 sur I !

3) Intégration : Soit $f : [\alpha,\beta] \times [a,b] \to E$, continue sur $[\alpha,\beta] \times [a,b]$. Alors : $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\right] dt$
ie : $\int_\alpha^\beta \int_a^b f(x,t)\,dt\,dx = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(x,t)\,dx\,dt$.

IV) Intégration et CV uniforme. Limite et suites d'intégrales.

1) Passage à la limite sous l'intégrale : Soit $(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}([a,b], E)^{\mathbb{N}}$ tq $f_n \rightrightarrows f$ cpm. Alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt$.

2) Lemme de Riemann-Lebesgue : Soit $f : [a,b] \to E$ cpm, avec E $\mathbb{C}$evn de dimension finie. Alors : $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t)\, e^{i\lambda t}\,dt = 0$.
De même, si E est un $\mathbb{R}$evn, $\lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\,dt = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \int_a^b f(t) \cos(\lambda t)\,dt = 0$

3) Dérivation, primitivation et limite uniforme

a/ Théorème : Soit (f_n) une suite d'appl. C^1 de $I \to E$. On suppose $\begin{cases} \text{. La suite } (f'_n) \text{ des dérivées CV simplement vers } : I \to E \text{. Et la CV est unif. sur tout segment inclu dans } I. \\ \text{.. } \exists a \in I \text{ tq } (f_n(a))_{n \in \mathbb{N}} \text{ CV.} \end{cases}$
Alors : $\begin{cases} \text{. } (f_n) \text{ SCV vers } f : I \to E \text{ et la CV est unif sur tout segment.} \\ \text{.. } f \text{ est } C^1 \text{ sur } I \text{, et } g = f' \end{cases}$

b/ <u>Variantes</u> : Le théorème s'étend aux fonctions cpm, lorsque les Df_n vérifient les hypothèses du a/. On aura alors : $Df = g$.

c/ <u>Exemple</u> : Soit la fonction de Riemann $\zeta : \begin{cases}]1,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{1}^{\infty} e^{-x \ln n} \end{cases}$.

. On montre que ζ est C^0 sur $]1,+\infty[$ de part la UCV de S_n vers ζ.

.. On montre que ζ est C^1 sur $]1,+\infty[$ et $\zeta'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\ln k}{k^x}$

d/ <u>Extension aux fonctions de classe C^k</u> : Si on a une suite d'appl. de classe C^k, $k \geq 2$, telles que $\begin{cases} .\ (f_n) \text{ SCV vers } g \text{, et UCV sur les segments} \\ .\ \forall p \in [0, k-1],\ \exists a_p \ /\ (f_n^{(p)}(a_p)) \text{ CV} \end{cases}$

alors : (f_n) SCV sur I vers f, de classe C^k, et $f^{(k)} = g$ avec UCV sur tout segment.