I) Dérivation

1) Définition : $f : I \to E$ dérivable en $x_0 \in I \iff \exists A \in E \,/\, \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \iff \exists A \in E \,/\, f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$.

2) Propriétés

a/ Divers : . f et g D^1 en x_0, alors $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.

.. f D^1 en $x_0 \iff \forall i = 1 \dots n$, f_i D^1 en x_0.

... Soit $f : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} \to E$. $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.

b/ Application bilinéaire : Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire et G de dim finie. Soit $\ell : \begin{array}{l} I \to G \\ x \mapsto B(f(x), g(x)) \end{array}$.

Si f et g sont D^1, alors $\ell'(x) = B(f'(x), g(x)) + B(f(x), g'(x))$.

. Rq : Les produits $f \times g$ et $f \wedge g$ sont bilinéaires.

c/ Application multilinéaire : Soit $u : E_1 \times \dots \times E_n \to G$, n-linéaire. Soit $\ell : \begin{array}{l} I \to G \\ x \mapsto u(f_1(x), \dots, f_n(x)) \end{array}$.

Alors : $\ell'(x) = \sum_{i=1}^{n} u(f_1(x), \dots, f_i'(x), \dots, f_n(x))$.

II) IAF

1) Remarque : Pas d'égalité des AF ...

2) IAF : Soit $f : [a,b] \to E$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^0 sur $[a,b]$. Si f et g sont C^1 sur $]a,b[$, et $\forall x \in [a,b]$, $\|f'(x)\| \leq g'(x)$

Alors : $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$

3) Conséquences : . Si $f : I \to E$, D^1 sur $\mathring{I}$, C^0 sur I, alors : f constante sur $I \iff \forall x \in \mathring{I}$, $f'(x) = 0$.

.. Si $f : I \to E$, D^1 sur $\mathring{I}$, C^0 sur I et $k \in \mathbb{R}^+$, alors : f est k-lipsch sur $I \iff \forall x \in \mathring{I}$, $\|f'(x)\| \leq k$

4) Dérivabilité d'un prolongement :

a/ Théorème : Soit $f : I \setminus \{x_0\} \to E$, C^0 et D^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. Et soit ℓ et λ / $\ell = \lim_{x_0} f(x)$ et $\lambda = \lim_{x_0} f'(x)$.

Alors $\bar{f}$ est un prolongement de f en x_0 avec $\bar{f}(x_0) = \ell$ et $\bar{f}'(x_0) = \lambda$.

b/ Théorème : Soit $f : I \to E$, C^0 sur I, C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $\exists \lambda = \lim_{x_0} f'(x)$, alors f C^1 sur I

III) Formule de Taylor

1) Formule globale de Taylor-Lagrange

. Soit $f : [a,b] \to E$, C^n sur $[a,b]$ et D^{n+1} sur $]a,b[$. On suppose $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall x \in]a,b[$, $\|f^{(n+1)}(x)\| \leq M$.

Alors : $\left\| f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right\| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

2) Formule Locale de Taylor-Young

. Soit $f : I \to E$ et $a \in I$. On suppose f C^{n-1} sur I, et $\exists$ une dérivée $n^{\text{ième}}$ en a : $f^{(n)}(a)$.

Alors : $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} \frac{1}{(x-a)^n} \left[f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!} f'(a) - \dots - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \right] = 0$

ou encore : $f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

3) Application aux extremums

. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathring{I}$. Supposons que f admette une dérivée seconde en x_0 : $f''(x_0)$.

Alors : . f admet un minimum local en $x_0 \iff f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geq 0$.

.. f admet un minimum local strict en $x_0 \iff f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$.

IV) Fonctions de classe C^k par morceaux

. Définition : $f : [a,b] \to E$ est C^k par morceaux $\iff$ f est C^k sur chaque segment d'une subdivison adaptée à f.