Fonctions réelles de variables réelles

(I) Fonctions monotones (sur un intervalle)

1) Théorème des limites monotones : $f : I \to \mathbb{R}$ est croissante, et si $x_0 \in \mathring{I}$, alors f possède en x_0 une limite à droite $f(x_0^+)$ et à gauche $f(x_0^-)$.
De plus, $f(x_0^+) = \inf_{x > x_0} f(x)$ et $f(x_0^-) = \sup_{x < x_0} f(x)$. On a encore $f(x_0^-) \leq f(x_0) \leq f(x_0^+)$.

2) Théorème aux bornes de I : Soit $a = \inf(I)$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Soit $f\nearrow$ de $I \to \mathbb{R}$. . Si $a \in I$, f admet une limite à droite $f(a+) = \inf_{x > a} f(x)$
.. Si $a \notin I$, deux cas : . Soit f minorée sur I, alors $f(x)$ admet une limite qd $x \to a$, et $\lim_{x \to a} f(x) = \inf_{x > a} f(x)$
. Soit f non minorée sur I, et alors $f(x) \underset{x \to a}{\to} -\infty$

(II) Fonctions continues

1) TVI (Théorème des val. intermédiaires) : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est C^0, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

2) Image d'un compact : Si $f : K \to \mathbb{R}$ est C^0, et K un compact, alors $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$.

3) Théorème de Heine : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est C^0 sur $[a,b]$, alors elle est u-C^0 sur $[a,b]$.

(III) Monotonie et continuité

1) Propriété : Quand $f : I \to \mathbb{R}$ est monotone, le TVI admet une réciproque : si $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors f C^0.

2) Homéomorphismes :
a/ Propriété : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une appl. C^0. Alors on a l'équivalence : f injective $\Leftrightarrow$ f strictement monotone.
b/ Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ C^0 et injective, d'image $J = f(I)$. Alors : $f^{-1} : J \to I$ existe et est C^0. f est un homéomorphisme de $I \to J$.

3) Points de discontinuité d'une appl. monotone : $f : I \to \mathbb{R}$ monotone, et $\mathcal{D}$ l'ens. de ses pts de discontinuité. $\mathcal{D}$ est au + dénombrable.

(IV) Dérivation

1) Définition : $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$, si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. Cela équivaut à $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \varepsilon(x)$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$
Ou encore, $f(x_0 + h) = f(x_0) + Ah + o(h)$

2) Dérivation composée : Théorème : $f : I \to \mathbb{R}$, D^1 en x_0, et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$ et D^1 en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ D^1 en x_0.
. Corollaire : $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$

3) Dérivation de l'appl. réciproque : $f : I \to \mathbb{R}$, C^0 et strict. monotone, donc homéomorphisme de $I \to J = f(I)$.
. Théorème : f^{-1} D^1 en $y_0 = f(x_0)$ $\Leftrightarrow$ $f'(x_0) \neq 0$. Alors, $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

4) Difféomorphismes :
a/ Définition : f difféomorphisme de $I \to J$ $\Leftrightarrow$ f et f^{-1} sont D^1 sur I et J (respect).
b/ Théorème : Soit f un homéomorphisme de $I \to J$, et f D^1 sur I. Alors : f difféo de $I \to J$ $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.
Dans ce cas, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. On remarquera que $f' \neq 0 \Leftrightarrow f'$ de signe constant.

5) Dérivées successives :
a/ Formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ Donc, si f et g sont C^n, alors (fg) aussi.
b/ Fonction composée : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est C^n, et $g : J \to \mathbb{R}$ C^n, avec $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est C^n sur I.

6) C^n-difféomorphismes
a/ Définition : $f : I \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme de $I \to J = f(I)$. f est C^n-difféo $\Leftrightarrow$ f et f^{-1} sont C^n sur I et J.
b/ Théorème : $f : I \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme de $I \to J = f(I)$, et f C^n. Alors : f C^n-difféo $\Leftrightarrow$ $\forall x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

(V) Accroissements finis

1) Extremums : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathring{I}$. On suppose f D^1 en x_0 et admettant un extremum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.

2) Théorème de Rolle : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq f C^0 sur $[a,b]$ et f D^1 sur $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a,b[$ / $f'(c) = 0$.

3) Théorème des AF :
a/ Egalité : $f : I \to \mathbb{R}$, C^0 sur $[a,b]$ et D^1 sur $]a,b[$. Alors $\exists c \in]a,b[$ / $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$.
b/ Corollaire : . Si de plus, $\exists m$ et M / $m \leq f' \leq M$, alors : $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
. Si de plus, $\exists M$ / $|f'| \leq M$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq M(b-a)$.
. Si de plus, $\exists g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tq $|f'(x)| \leq g'(x)$, alors : $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

4) Application à la variation des fonctions :
a/ Propriété : f cte sur I $\Leftrightarrow$ f' nulle sur I. $f\nearrow$ sur I $\Leftrightarrow$ f' $\oplus$ sur I
b/ Fonction lipschitzienne : f k-lipschitzienne sur I $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathring{I}$, $|f'(x)| \leq k$.

5) Dérivabilité d'un prolongement
a/ Théorème : $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, C^0 sur $I \setminus \{x_0\}$ et D^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l'$.
Alors f se prolonge en $\tilde{f}$ dérivable de $I \to \mathbb{R}$. De plus, $\tilde{f}'$ est C^0 en x_0.
b/ Autres formes : $f : I \to \mathbb{R}$, C^0 sur I et D^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l'$. Alors f D^1 en x_0 et f' C^0 en x_0.

6) Théorème de Darboux : $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^0 et D^1 sur $[a,b]$. Soit $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. Alors $\exists c \in]a,b[$ / $f'(c) = 0$.
. Autre Théorème : Soit $f : I \to \mathbb{R}$, D^1 sur I, alors $f'(I)$ est un intervalle.

VI) Egalités de Taylor Lagrange

1) <u>Théorème</u> : $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, C^n sur $[a,b]$ et D^{n+1} sur $]a,b[$. Alors $\exists c\in]a,b[$ / $f(b) = \underbrace{f(a)+(b-a)f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{\text{reste de Lagrange}}$

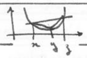
2) <u>Inégalité de TL</u> : Mêmes hypothèses, mais $\exists M\geq 0$ / $|f^{(n+1)}|\leq M$. Alors : $\left|f(b)-f(a)-(b-a)f'(a)-\dots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)\right| \leq M\times\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$

VII) Fonctions convexes

1) <u>Définition</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ est convexe $\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $\forall t\in(0,1)$, $f(tx+(1-t)y)\leq t f(x)+(1-t)f(y)$. Si l'inégalité est stricte, f est strict. convexe.

2) <u>Inégalité de convexité</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ convexe, et $(x_1,\dots,x_n)\in I^n$, $(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}_+^n$ / $\sum_1^n t_i=1$, alors $f(t_1x_1+\dots+t_nx_n)\leq\sum_1^n t_i f(x_i)$.

3) <u>Inégalité des pentes</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ convexe, et $x\leq y\leq z$ dans I. $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leq\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\leq\frac{f(z)-f(y)}{z-y}$



4) <u>Dérivabilité à gauche et à droite</u> :

a/ <u>Propriété</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ convexe et $u\in\mathring{I}$. Alors f possède en u une dérivée à droite $f_d'(u)$ et à gauche $f_g'(u)$. $f_g'(u)\leq f_d'(u)$

b/ <u>Continuité sur $\mathring{I}$</u> : Si $f:I\to\mathbb{R}$ convexe sur I, alors elle est C^0 sur $\mathring{I}$.

c/ <u>Propriété</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ convexe sur I. Alors f_d' et f_g' sont $\uparrow$ sur I.

5) <u>Position par rapport aux 1/2 tangentes</u> : $f:I\to\mathbb{R}$ convexe et $x\in\mathring{I}$. Alors, $\forall y\in I$, $f(y)\geq f(x)+f_d'(x).(y-x)$.
et $f(y)\geq f(x)+f_g'(x).(y-x)$.

6) <u>Réciproque</u> :

a/ <u>Théorème</u> : $f:I\to\mathbb{R}$, C^0 sur I, D^1 sur $\mathring{I}$ et : f convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f'\uparrow$ sur $\mathring{I}$

b/ <u>Théorème</u> : $f:I\to\mathbb{R}$, C^0 sur I, D^2 sur $\mathring{I}$: f convexe sur I $\Leftrightarrow$ $f''\geq 0$ sur $\mathring{I}$