I) EVN de dimension finie

1) Rappels :

a/ $\mathbb{R}^n$ est complet ; il en est de même pour $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ et pour $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

b/ E de dim finie : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors l'isomorphisme $\varphi_{\mathcal{B}} \begin{cases} E \to K^n \\ x \mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$ permet de transporter $\|\cdot\|_\infty$ de K^n sur E.
On obtient $\|x\|_\infty^{\mathcal{B}} = \sup_i |x_i|$. On dit que $(E, \|\cdot\|_\infty^{\mathcal{B}})$ est isométrique à $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$, il est donc complet. Les compacts sont donc les fermés bornés.

2) Equivalence des normes ; Théorème : Sur un Kev E de dim finie, toutes les normes sont équivalentes.

3) Conséquences :

a/ Topologie : la topologie d'un evn de dim finie ne dépend pas de la norme choisie.

b/ Continuité des appl. linéaires : Théorème : Soient E et F deux Kevn, avec E de dim finie. Alors : $u \in \mathcal{L}(E,F) \Rightarrow u$ continue.
De même, si $E_1, \dots, E_n$ de dims finies, alors u n-linéaire sur $E_1 \times \dots \times E_n$ est continue.

c/ Compact de E : Théorème : Si E est un evn de dim finie, les parties compactes sont les fermés bornés.
. Théorème de BW : Si E un Kev de dim finie, et (x_n) une suite bornée de E, alors on peut extraire une suite CV dans E.

d/ Théorème : Tout evn de dim finie est complet.
. Corollaire : Soit E un evn, et F un sev de E de dim finie. Alors F fermé dans E.

4) Théorème de Riesz : Théorème : Soit E un Kevn. Si $B'(0_E, 1)$ est compacte, alors E est de dim finie.

. Corollaire : Soit E un evn, et F un sev fermé de E, $F \overset{\neq}{\subset} E$. Alors $\exists x \in E \,/\, \|x\| = 1$ et $d(x, F) \geq \frac{1}{2}$.

II) Exemples d'espaces de Banach

1) Propriété : Tout evn de dim finie est complet. On les appelle "espaces de Banach".

2) $B(X,E)$

a/ Définition : Soit E un evn, et soit X un ens. non vide. On note $B(X,E)$ l'ens. des applications bornées de $X \to E$. $B(X,E) \hookrightarrow \mathcal{F}(X,E)$.

b/ Norme sur $B(X,E)$: $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$. C'est une norme sur $B(X,E)$. C'est la norme de la CV uniforme. $(B(X,E), N_\infty)$ est evn.

c/ Théorème : Si E est un espace de Banach, $B(X,E)$ aussi.

d/ Cas particulier : $X = \mathbb{N}$. Alors $B(\mathbb{N}, E)$ est l'espace vectoriel des suites bornées de E. On le note $\ell^\infty(E)$. Si E complet, alors $\ell^\infty(E)$ aussi.
Notamment, $\ell^\infty(\mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{C})$ sont complets.

3) $\mathcal{L}_c(E,F)$

a/ Norme : Soient E, F deux Kevn. On peut munir $\mathcal{L}_c(E,F)$ de la norme d'opérateur : $|||u||| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B'(0_E, 1)} \|u(x)\|$.

b/ Théorème : Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}_c(E,F)$ aussi muni de $|||\cdot|||$.

c/ Cas particulier : Si $F = K$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F est complet donc $\mathcal{L}_c(E,F)$ est complet aussi. C'est un ens. de formes linéaires C^0 sur E.
C'est le dual topologique de E, noté E'.

4) Autres exemples

a/ $\ell^1(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n) \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \text{ CV} \right\}$ est complet (muni de $\|\cdot\|_1$)

b/ $\ell^2(\mathbb{R}) = \left\{ (x_n) \,/\, \sum_0^{\infty} |x_n|^2 \text{ CV} \right\}$ est complet (muni de $\|\cdot\|_2$)

III) Convexité

1) Rappel : Si A est convexe et si $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$, alors $\forall t_i \geq 0 \,/\, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \in A$.

2) Convexité de $\overline{A}$ et $\mathring{A}$

a/ Propriété : Si A est convexe dans un evn, $\overline{A}$ l'est aussi.

b/ Propriété : Soit $\mathring{A} \neq \emptyset$ et A convexe. Soit $x \in \mathring{A}$ et $y \in A$. Alors $[x, y[\subset \mathring{A}$, où $[x, y[= [x, y] \setminus \{y\}$.

c/ Propriété : Si A est convexe, et $\mathring{A} \neq \emptyset$, alors $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$

3) Enveloppe convexe d'une partie de E

a/ Propriété : Toute intersection de convexes est un convexe de E.

b/ Définition : Soit A une partie qcq de E. $\operatorname{Conv}(A) = \bigcap_{\substack{C \subset E \\ C \text{ convexe et } A \subset C}} C$. C'est la + petite partie convexe contenant A.

c/ Description : Si $A \neq \emptyset$, $\operatorname{Conv}(A)$ est l'ens. des barycentres à coefficients positifs de familles finies de points de A.

d/ Théorème de Carathéodory :
. Théorème : Si E est de dim n, alors $\operatorname{Conv}(A)$ est l'ens. des barycentres à coefficients positifs des familles de $(n+1)$ points de A.
. Application : Si A est une partie compacte de E, alors $\operatorname{Conv}(A)$ est compacte aussi lorsque $\dim_{\mathbb{R}} E = n$.

4) Points extrémaux d'un convexe compact

a/ Définition : A un convexe compact de E, et $a \in A$. a est un pt extrémal de A $\Leftrightarrow$ $A \setminus \{a\}$ est convexe.

b/ Propriété : a est un pt extrémal de A $\Leftrightarrow$ a n'appartient à aucun intervalle ouvert d'extrémités dans A ($\forall x, y \in A$, $a \notin]x, y[$).

c/ Exemples : . A carré $\to$ les angles ! .. A disque $\to$ le bord du disque !

d/ Théorème de Krein-Milman : A convexe compact $\Rightarrow$ A enveloppe convexe de ses pts extérieurs.