Espaces vectoriels (rappels + compléments)

I) Familles libres, génératrices, bases

1) Définition : $f : K^{(I)} \to E$, $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum'_{i\in I} \lambda_i x_i$ alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)$. $\begin{cases} x_i \text{ libre} \Leftrightarrow f \text{ injective} \\ x_i \text{ génératrice} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \\ x_i \text{ base} \Leftrightarrow f \text{ bijective} \end{cases}$

2) Démonstration de liberté : Montrer que les $(\lambda_i)_{i\in I}$ sont tous nuls lorsque la CL est nulle.
Seconde méthode : par triangulation, $(x_1, \dots, x_p)$ libre implique $(y_1, \dots, y_p)$ libre avec $y_i = \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} \cdot x_j$ $(\alpha_i \neq 0)$.

II) Dimension

1) Définition : un Kev E est fini $\Leftrightarrow$ il admet au moins une famille génératrice finie.
La dimension de E est le plus petit entier n tel que une famille de n vecteurs soit génératrice.

2) Théorèmes fondamentaux

a/ Th. d'existence des bases : tout ev de dim finie admet au moins une base.
b/ Th. de la dimension : toutes les bases d'un ev E de dim finie sont de m cardinal, égal à la dim de E.
c/ Th. de la base incomplète : soit $(x_i)_{i\in I}$ génératrice de E, et $J \subset I$ tel que $(x_i)_{i\in J}$ libre dans E. Alors $\exists L \,/\, J \subset L \subset I$ et $(x_i)_{i\in L}$ base.
d/ Théorème : tout sev de E fini est aussi fini et de dim $\leq$.
e/ Corollaires : Si $\dim E = n$, toute famille libre à n éléments est une base, et toute famille génératrice à n éléments est une base.

3) Démonstration de base :

a/ Th. de la base télescopique : Soit $K \subset L$ deux corps, et L un Kev de dim finie n. $\begin{cases} (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \text{ une base de L sur K} \\ (e_1, \dots, e_p) \text{ une base de E sur L} \end{cases} \Rightarrow (\varepsilon_i e_j)_{\substack{i\in [\![1,n]\!] \\ j \in [\![1,p]\!]}}$ base de E sur K
. Corollaire : $\dim_K E = \dim_K L \times \dim_L E$
b/ Utiliser : (Génératrice + n éléments) ou (libre + n éléments) $\Rightarrow$ base.
c/ Utiliser : les matrices, déterminants.

4) Calculs de dimensions

a/ en exhibant une base.
b/ en utilisant des formules :
. $\dim E \times F = \dim E + \dim F$
. $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$
. $\dim (F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2$

. Th du rang : $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathrm{rg}\, u = \dim E - \dim \mathrm{Ker}\, u$

III) Somme de sous-espaces

1) Définition : Soit $f : \begin{array}{l} E_1 \times \dots \times E_p \to E \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x) = x_1 + \dots + x_p \end{array}$, linéaire, et d'image $\mathrm{Im} f \subset E$. On appelle "somme des E_i" l'image de f : $\sum_{i=1}^{p} E_i$

2) Somme directe :

a/ Définition : La somme des E_i est directe $\Leftrightarrow$ f injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker} f = \{(0_{E_1}, \dots, 0_{E_p})\}$ $\Leftrightarrow \left[\forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p,\ x_1 + \dots + x_p = 0_E \Rightarrow \forall i, x_i = 0_{E_i}\right]$
b/ Propriété : La somme des E_i est directe $\Leftrightarrow$ $\forall i = 1, \dots, p$, $E_i \cap \left(\overset{p}{\underset{j\neq i}{+}} E_j\right) = \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $E_i \cap \left(\overset{i-1}{\underset{j=1}{+}} E_j\right) = \{0\}$.
c/ Propriété : En dimension finie, $\left(\overset{p}{\underset{i=1}{+}} E_i\right)$ directe $\Leftrightarrow$ $\dim\left(\overset{p}{\underset{i=1}{+}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim E_i$.

IV) Sev supplémentaires.

1) Définition : E_1 et E_2 sont supplémentaires $\Leftrightarrow$ $E_1 \oplus E_2 = E$ $\Leftrightarrow \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ E_1 + E_2 = E \end{cases}$

2) En dimension finie : Soit $\dim E = n$. $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow \left[E_1 \cap E_2 = \{0\} \text{ et } \dim E_1 + \dim E_2 = n\right] \Leftrightarrow \left[E_1 + E_2 = E \text{ et } \dim E_1 + \dim E_2 = n\right]$.

3) Propriété : Si E de dim finie, tout sev de E possède un supplémentaire.

4) Projecteurs :

a/ Ppiés : Soit E un Kev et $E_1 \oplus E_2 = E$. p_1 sur E_1 et p_2 sur E_2.
$\begin{cases} .\ p_1 + p_2 = \mathrm{Id}_E \\ ..\ p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0 \\ \dots\ \forall x \in E_1,\ p_1(x) = x \\ ::\ \forall x \in E_2,\ p_2(x) = x \end{cases}$ $\begin{cases} \therefore\ \mathrm{Ker}\, p_1 = E_2,\ \mathrm{Ker}\, p_2 = E_1 \\ .\ p_1^2 = p_1 \\ .\ p_2^2 = p_2 \end{cases}$ $\mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p = E$.
b/ Définition : $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur $\Leftrightarrow$ $p^2 = p$.
c/ Ppté : p est le projecteur de E sur $(\mathrm{Im}\, p)$ //ment à $(\mathrm{Ker}\, p)$.
. Si E de dimension finie, alors $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.
d/ Généralisation à une somme : $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = E$, alors on en tire les projecteurs p_i sur E_i //ment à $\left(\bigoplus_{j\neq i} E_j\right)$.

V) Application linéaire

1) Définition par restriction aux sev supplémentaires : Soit $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$, et $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. $\exists! u \in \mathcal{L}(E,F) \,/\, \forall i \in [\![1,p]\!]$, $u_{|E_i} = u_i$.

2) Définition par l'image d'une base : $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et F un ev de dim qcq. $\forall (a_1, \dots, a_n) \in F^n$, $\exists! u \in \mathcal{L}(E,F) \,/\, \forall i, u(e_i) = a_i$

3) Image et supplémentaire du noyau : $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et S un supplémentaire de $(\mathrm{Ker}\, u)$ dans E (s'il existe). Alors S isomorphe à $(\mathrm{Im}\, u)$

4) Rang

a/ Définition : Rang d'une famille de vecteurs (x_i) $\to$ $\mathrm{rg}\,(x_i)_{i\in I} = \dim\left[\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\right]$
b/ Rang d'une appl. linéaire : $\mathrm{rg}\,(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$.
c/ Th. du rang : $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{codim}\,(\mathrm{Ker}\, u) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$.
d/ Lemme : Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $(\mathrm{Im}\, u)$. $\forall i = 1, \dots, r$, $\exists \varphi_i \in E \,/\, u(\varphi_i) = e_i$. Alors $S = \mathrm{vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est suppl. de $(\mathrm{Ker}\, u)$ dans E.
e/ Corollaires : . Si E et F de dim finie, alors $\mathrm{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$
.. Si $\dim E = \dim F$, alors u injective $\Leftrightarrow$ u surjective $\Leftrightarrow$ u bijective.
f/ rang de $(v \circ u)$: $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$. $\begin{cases} \mathrm{rg}(v\circ u) \leq \min(\mathrm{rg}\, u, \mathrm{rg}\, v) \\ \mathrm{rg}(v \circ u) \geq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v - \dim F \end{cases}$ et $\left\{ |\mathrm{rg}\, u - \mathrm{rg}\, v| \leq \mathrm{rg}\,(u+v) \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v \right.$.

VI) $\mathcal{L}(E)$

E un Kev. $(\mathcal{L}(E),+,\cdot,\circ)$ est l'algèbre des endomorphismes de E, associative, unitaire et non commutative.

1) **Eléments nilpotents** : $u\in\mathcal{L}(E)$ est nilpotente $\Leftrightarrow$ $\exists p\in\mathbb{N}^*\,/\,u^p=0$.

.Remarquons que : u nilpotent $\Leftrightarrow$ $(Id-u)$ est un élément inversible, d'inverse $(Id_E+u+u^2+\dots+u^{p-1})$

---

2) **Noyaux itérés** :

a/ **Propriété** : $\begin{cases}\operatorname{Ker}u^0=\{0\}\subset\operatorname{Ker}u\subset\operatorname{Ker}u^2\subset\dots\subset\operatorname{Ker}u^k\subset\dots\\ \operatorname{Im}u^0=E\supset\operatorname{Im}u\supset\operatorname{Im}u^2\supset\dots\supset\operatorname{Im}u^k\supset\dots\end{cases}$

b/ **Propriété** : S'il existe $p\in\mathbb{N}\,/\,\operatorname{Ker}u^{p+1}=\operatorname{Ker}u^p$, alors $\forall m\in\mathbb{N}$, $\operatorname{Ker}u^{p+m}=\operatorname{Ker}u^p$

c/ **Propriété** : le moment où $(\operatorname{Ker}u^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est stationnaire est atteint avant le rang p de u. On aura donc : $\operatorname{Ker}u^p=\operatorname{Ker}u^{pm}$

---

3) **Centre de $\mathcal{L}(E)$**

a/ **Définition** : c'est l'ens. des $u\in\mathcal{L}(E)$ tq $\forall v\in\mathcal{L}(E)$, $u\circ v=v\circ u$.

b/ **Caractérisation** : En dim finie, le centre de $\mathcal{L}(E)$ est constitué des homothéties : λId_E.

c/ **Théorème** : Pour $u\in\mathcal{L}(E)$, nous avons l'équivalence : u central $\Leftrightarrow$ $\forall x\in E$, $x\,//\,u(x)$ $\Leftrightarrow$ u est une homothétie.

---

4) **Commutant d'un endomorphisme.**

a/ **Définition** : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, on appelle commutant de u noté $\mathcal{C}(u)$ l'ens. des endomorphismes qui commutent avec u.

$\mathcal{C}(u)=\{v\in\mathcal{L}(E)\,/\,v\circ u=u\circ v\}$, et $K Id_E=\bigcap\limits_{u\in\mathcal{L}(E)}\mathcal{C}(u)$.

b/ **Ppté.** $\mathcal{C}(u)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

c/ **Ppté.** $K[u]\subset\mathcal{C}(u)$

---

5) **$GL(E)$**

a/ **Définition** : C'est l'ens. des éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. $(GL(E),\circ)$ est un gpe, appelé groupe linéaire.

b/ En dim finie : On a l'équivalence :

- . $u\in GL(E)$
- .. u injective
- ... u surjective
- ∴ u inversible à gauche ou à droite
- ∷ u régulier à gauche ou à droite
- ⁙ $\det u\neq 0$.