Espaces préhilbertiens réels

I) Définitions

1) **EPR** : Un espace préhilbertien réel, EPR, est un couple (E, q) avec E $\mathbb{R}$ev et q une FQ sur E, définie positive.
La forme polaire associée est nommée "produit scalaire" sur E.

2) **Norme euclidienne** : Si (E,q) est un EPR, alors $x \mapsto \sqrt{q(x)}$ est une norme Euclidienne associée à q.
. *Définition* : Si $(E, \|\cdot\|)$ est de Banach, alors on dit que c'est un espace de Hilbert.

3) **Réécritures** : $(x|y) = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right] = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]$.
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$
$|(x|y)| \leq \|x\|\cdot\|y\|$ et alors on définit l'écart angulaire $\theta \in [0,\pi]$ tq $\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

4) **Exemples** : . $\mathbb{R}^n$ avec $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .. $E = \ell^2(I)$ où I dénombrable, avec $q(u) = \sum_{i \in I} u_i^2$
.. $E = \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ avec $q(f) = \int_a^b f(t)^2\,dt$

II) Orthogonalité

1) **Définition** : E un EPR. $x \perp y \Leftrightarrow (x|y) = 0$. Alors, on obtient la relation de Pythagore : $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

2) **Orthogonal d'une partie de E** : Soit A une partie de E. On définit l'orthogonal de A : $A^\perp = \{y \in E \,/\, \forall x \in A,\ (x|y) = 0\}$
. *Propriété* : . $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$. $A^\perp = (\mathrm{vect} A)^\perp$
. $A \subset A^{\perp\perp}$. $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$
. $A^\perp \hookrightarrow E$. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

3) **Somme orthogonale de sous espaces** : Soient F et G deux sev. $F \perp G \Rightarrow F \overset{\perp}{\oplus} G$ noté aussi $F \ominus G$.

4) **Familles orthogonales** : Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de E est orthogonale $\Leftrightarrow$ $\forall i \neq j$, $(x_i|x_j) = 0$.
. *Propriété* : une famille orthogonale est libre. Et si $\forall i$, $\|x_i\| = 1$, on dit qu'elle est orthonormale.

5) **Supplémentaire orthogonal** : Soient F_1 et F_2 deux sev de E. F_1 et F_2 supplémentaires orthogonaux $\Leftrightarrow$ $F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_2 = E$.
. *Propriété* : Si F admet un suppl. orthogonal G, alors $G = F^\perp$. Dans ce cas, $F^{\perp\perp} = F$.
Remarquons que $F^\perp$ n'est pas toujours un suppl. orthogonal de F ; par exemple $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$, $F = \{f \in E \,/\, f(0) = 0\} \Rightarrow F^\perp = \{0_E\}$.
. *Théorème* : Soit E de dim qcq, et $F \hookrightarrow E$ de dim finie, alors $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$.
. *Corollaire* : Si E est de dim finie, tous les sev de E admettent un suppl. orthogonal.

6) **Projection orthogonale, projecteur orthogonal**

a/ *Définition* : Soit E un EPR et $F \hookrightarrow E$ possédant un suppl. $\perp$. On associe à F le projecteur p_F parallèlement à $F^\perp$. C'est un proj. $\perp$.
b/ *Propriété* : p_F est une application linéaire continue. On note que $p_{F^\perp} = Id - p_F$.
Alors, $F = \mathrm{Ker}\, p_{F^\perp} = p_{F^\perp}^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E. De même $F^\perp$ est fermé dans E.
c/ *Distance* : Soit $x \in E$, $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. On suppose que F admet un suppl. $\perp$. Alors $d(x,F) = \|x_2\| = \|x - x_1\|$.
d/ *Caractérisation des projections orthogonales* : Soit E un EPR, et $p \in \mathscr{L}(E)$. p proj orthog. $\Leftrightarrow$ $p^2 = p$, et $\forall x,y$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.
e/ *Cas où F est de dim finie n* : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de F. Alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^n (x|e_i)\, e_i$. On a encore : $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \|(x|e_i)\|^2$.
Et encore : $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \|(x|e_i)\|^2$.
. *Théorème* : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormale de E. Alors $\sum_{i=1}^n (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2$. "Inégalité de Bessel".
. *Théorème* : Soit $(e_i)_{i\in I}$, I dénombrable, une famille orthonormale de E. Alors $\forall x \in E$, $((x|e_i)^2)_{i\in I}$ est sommable et la somme $\sum_{i\in I} (x|e_i)^2 \leq \|x\|^2$.

III) Espaces euclidiens (= EPR de dim finie, donc complet).

1) **Bases orthonormales** : Il en existe, car ce sont les bases réduites pour $q : x \mapsto \|x\|^2$. Alors, $\mathcal{B}$ orthonormale $\Leftrightarrow$ $\mathrm{mat}(q, \mathcal{B}) = I_n$.

2) **Isomorphisme canonique entre E et E*** : Soit E euclidien. Pour tout $x \in E$, on définit : $\delta(x) : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ y \mapsto (x|y) \end{array}$ qui est un isom. de $E \to E^*$.
. *Conséquence* : $\forall \varphi \in E^*$, $\exists! x \in E \,/\, \varphi = \delta(x) = (x|\cdot)$.
Dans une BON, $\delta(x) : y \mapsto (x|y) = \sum_1^n x_i y_i = \sum_1^n x_i e_i^*(y)$. Donc, $\delta(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i^*$ et aussi $\delta(e_i) = e_i^*$.

3) **Détermination pratique de BON**

a/ *Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$* : Alors toute famille orthogonale $(e_1 \dots e_p)$ de E se complète en une BON de E.
b/ *Méthode de Gauss* : Elle permet d'obtenir une décompo en carrés de forme quadratique. Dans notre cas, cela donne une BON.
c/ *Méthode de Schmidt* : Soit $\mathcal{B} = (e_1 \dots e_n)$ une base qcq de E. Soient $F_i = \mathrm{vect}(e_1 \dots e_i)$. On définit alors $e_1' = e_1$ et $e_i' = e_i - p_{F_{i-1}}(e_i)$
Puis, $\forall i$ $\varepsilon_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}$. Alors : $(e_1' \dots e_n')$ est une BO de E et $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)$ une BON. De plus, $F_i = \mathrm{vect}(e_1' \dots e_i') = \mathrm{vect}(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_i)$.
d/ *BON associée à un drapeau* : Soit $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n = E$. $\dim F_i = i$.   Rq : $e_i' = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(e_i|e_k')}{(e_k'|e_k')} e_k'$
On peut trouver une base $\mathcal{B}$ associée au drapeau (F_i) et tq $\mathcal{B}$ soit BON.

4) **Changement de BON**

a/ *Définition* : Soit $\mathcal{B}$ une BON. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathcal{B}'$ est BON $\Leftrightarrow$ ${}^tPP = I_n$.
b/ *Définition* : Une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale ssi ${}^tPP = I_n$.

c/ Caractérisation : P est une matrice orthogonale $\Leftrightarrow$ les lignes et les colonnes forment deux BON de $\mathbb{R}^n$.

$\Leftrightarrow \forall j,k,\ \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, p_{ik} = \delta_{jk} \Leftrightarrow \forall j,k,\ (l_j|l_k) = \delta_{jk} \Leftrightarrow \forall j,k,\ (c_j|c_k) = \delta_{jk}$.

d/ Propriété : P est orthogonale $\Rightarrow$ $\det P = \pm 1$. Si $\det P = +1$, on dit qu'elle est droite, sinon on dit qu'elle est gauche.

5) Groupe orthogonal

a/ Théorème : L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ des matrices réelles orthogonales d'ordre n, est un ssgpe de $GL_n(\mathbb{R})$, nommé gpe orthogonal.

b/ Définition : le noyau de : $\det : \begin{array}{l} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \to \{-1,+1\} \\ P \mapsto \det P \end{array}$ est le groupe "spécial orthogonal", noté $SO(n)$ ou $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}^+(n)$.

6) Rappels : orientation d'un espace euclidien

a/ Relation d'équivalence : $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}' \Leftrightarrow \det P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} > 0 \Leftrightarrow$ les deux bases ont même sens. On a donc deux classes d'équivalence.

b/ Cas de BON : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ BON. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même sens $\Leftrightarrow P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ est orthogonale droite.

c/ Produit mixte : Soit E euclidien orienté de dim n.

- Propriété : L'application "déterminant dans la base $\mathcal{B}$" $d_{\mathcal{B}} : (x_1 \dots x_n) \in E^n \mapsto d_{\mathcal{B}}(x_1 \dots x_n)$ est la même dans toutes les BON directes.
- Définition : $D_{\mathcal{B}}$, avec $\mathcal{B}$ BON directe, est le produit mixte de E. On le note : $\det(x_1 \dots x_n) = [x_1 \dots x_n]$.
- Propriétés : $[e_1 \dots e_n] = +1$, si BON directe.
  $= -1$, si BON indirecte.

  Et si $(x_1 \dots x_n)$ orthogonale, alors $\det(x_1 \dots x_n) = [x_1 \dots x_n] = \pm \|x_1\| \dots \|x_n\|$.

d/ Produit vectoriel : Soit E de dimension 3, euclidien orienté.

Soient $(u,v) \in E^2$. On définit la forme linéaire : $\varphi_{u,v} : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \det(u,v,x) = [u,v,x] \end{array}$

- Définition : Le vecteur a est le produit vectoriel de u et v, noté $u \wedge v$, défini par : $\varphi_{uv} = (a|\cdot)$. Alors, $\forall x \in E$, $\det(u,v,x) = (u \wedge v|x)$.