I) Produits scalaires hermitiens

1) Formes sesquilinéaires

a/ Définition : Soit E un $\mathbb{C}$ev. φ est sesquilinéaire sur E, $\varphi : E\times E \to \mathbb{C}$, telle que : $\begin{cases} \cdot\ \forall x\in E, & \varphi(x,\cdot) \text{ est linéaire.} \\ \cdot\ \forall y\in E, & \varphi(\cdot,y) \text{ est semi-linéaire, ie : } \varphi(x+\lambda x',y) = \varphi(x,y) + \bar{\lambda}\varphi(x',y) \end{cases}$

Alors φ possède la symétrie hermitienne : $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$.

b/ Exemples : $\mathrm{Tr}(\bar{A}B)$, $\int_a^b \overline{f(t)}g(t)\,dt$, $\sum \bar{x}_i y_i$.

c/ Matrice en dim finie : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. $\mathrm{mat}(\varphi,\mathcal{B}) = [\varphi(e_i,e_j)] = A$. Alors : $\varphi(x,y) = {}^t\bar{X}AY$

On dit que φ est symétrique hermitienne si $A = {}^t\bar{A}$, et on dit que A est hermitienne.

2) Formes quadratiques hermitiennes.

a/ Définition : Soit φ sesquilinéaire hermitienne sur E. Alors $q : \begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \varphi(x,x) \end{array}$ est la FQ hermitienne associée à φ.

L'ens. QH(E) est un $\mathbb{R}$ev.

b/ Exemples : $\sum |x_i|^2$, $\int_a^b |f(t)|^2\,dt$, $\mathrm{Tr}(\bar{A}A)$, $\mathrm{Tr}({}^t\bar{A}A)$.

c/ Matrice en dim finie : $q(x) = {}^t\bar{X}AX$ avec A hermitienne.

d/ Identités :
- $q(\lambda x) = |\lambda|^2 q(x)$
- $q(x+y) = q(x) + q(y) + 2\,\mathrm{Re}(\varphi(x,y))$
- $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}\left[q(x+y) - q(-x+y) + i\,q(ix+y) - i\,q(-ix+y)\right]$
- $q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$.

3) FQH définies positives

a/ Définition : une FQH sur E est définie positive $\Leftrightarrow$ $\forall x\in E,\ q(x)\geq 0$ et $q(x)=0 \Rightarrow x=0$.

b/ Exemples : $\mathrm{Tr}({}^t\bar{A}A) = \sum_i \sum_j |a_{ij}|^2$, $\int_a^b |f(t)|^2\,dt$

c/ Inégalité de Cauchy Schwartz : Soit q une FQH déf. ≥ 0, de forme polaire φ. Alors : $|\varphi(x,y)|^2 \leq q(x)\,q(y)$.

d/ Inégalité de Minkowski : Soit q une FQH déf ≥ 0. Alors : $\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$

e/ En dim finie : q définie positive $\Leftrightarrow$ $\forall X\neq 0,\ {}^t\bar{X}AX > 0$.

II) Espaces préhilbertiens complexes

1) Définition : Un espace préhilbertien complexe, EPC, est un couple (E,q) avec E $\mathbb{C}$ev et q FQH déf. ≥ 0 sur E.

La forme polaire φ est nommé "produit scalaire hermitien" sur E : $(\lambda x|y) = \bar{\lambda}(x|y)$.

- Remarque : Si E est complet muni de $\|\cdot\|$, c'est un espace de Hilbert complexe.

2) Réécritures : $(x|y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2\right]$.

3) Orthogonalité : On dit que $x\perp y$ si $(x|y)=0$. On définit l'orthogonal de A ens qcq : $A^\perp = \{x\in E \mid \forall y\in A, (x|y)=0\}$.

Et si x et y sont $\perp$, alors : $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

4) Familles orthogonales

a/ Définition : $(x_i)_{i\in I}$ est orthogonale $\Leftrightarrow$ $\forall i,j,\ (x_i|x_j)=0$. Si de plus $\forall i,\ \|x_i\|=1$, alors elle est orthonormale.

b/ Propriété : une famille orthogonale est libre.

c/ Théorème : Si E est de dimension finie, alors elle possède une BON.

5) Sommes directes orthogonales : Si deux sev F et G sont orthogonaux, alors leur somme est directe orthogonale : $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

6) Supplémentaire orthogonal :

a/ Définition : F et G sont des sev supplémentaires orthogonaux de E $\Leftrightarrow$ $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$

b/ Propriété : Si G est un supplémentaire $\perp$ de F, $F \overset{\perp}{\oplus} G = E$, alors $G = F^\perp$ et $F = F^{\perp\perp}$. L'existence de G n'est pas assurée !

7) Projection orthogonale :

a/ Définition : Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$, s'appelle le projecteur "orthogonal" sur F, p_F.

b/ Propriété : p_F est continu, et si $F\neq\{0\}$ alors $|||p_F||| = 1$.

Conséquence : F et $F^\perp$ sont fermés dans E.

c/ Distance : $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$.

8) Cas où dimF est finie :

a/ Théorème : Si $F\subset E$, de dim finie (pour F), alors $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$. Et si $(e_1,\dots,e_p)$ BON de F, alors $p_F = \sum_{i=1}^p (e_i|\cdot)\,.\,e_i$. ⚠ $(e_i|\cdot)$ et non $\cancel{(\cdot|e_i)}$

b/ Conséquence : $d(x,F) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^p |(e_i|x)|^2$

c/ Inégalité de Bessel : Avec les égalités ci-dessus, on obtient : $\sum_{i=1}^p |(e_i|x)|^2 \leq \|x\|^2$ lorsque $(e_1,\dots,e_p)$ BN.

III) Espaces hermitiens

1) Définition : Un espace hermitien est un EPC de dim finie.

2) Bases orthonormales : $\mathcal{B}$ est une BON de E $\Leftrightarrow$ $\mathrm{mat}(\|\cdot\|^2,\mathcal{B}) = I_n$. Dans une telle base, $(x|y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i$.

3) Expression d'une forme linéaire : Soit E hermitien. $\forall \varphi\in E^*$, $\exists!\, a\in E$ tq : $\forall x\in E,\ \varphi(x) = (a|x)$. $(\varphi = (a|\cdot))$.

Alors : $\delta : \begin{array}{l} E \to E^* \\ x \mapsto (x|\cdot) \end{array}$ est une bijection, mais pas un isom. car $\delta(\lambda a) = \bar{\lambda}\,\delta(a)$, et semi-linéaire de $E\to E^*$.

4) Obtention d'une BON : Procédé de Schmidt $\to$ $e_i' = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{(e_j'|e_i)}{(e_j'|e_j')}\,e_j'$.

5) Changement de BON

a/ *Définition* : $\mathcal{B}$ une BON de E. Alors, si $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $\mathcal{B}'$ orthonormale $\Leftrightarrow {}^t\overline{P}P = I_n$.

b/ *Définition* : Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$. On dit que P est "unitaire" ssi ${}^t\overline{P}P = I_n$.

c/ *Caractérisations* : P unitaire $\Leftrightarrow$ P inversible et ${}^t\overline{P} = P^{-1}$

$\Leftrightarrow P\,{}^t\overline{P} = I_n \Leftrightarrow {}^t\overline{P}$ unitaire $\Leftrightarrow {}^tP$ unitaire

$\Leftrightarrow \forall i,j,\ \sum_{k=1}^{n} \overline{p_{ki}}\, p_{kj} = \delta_{ij}$

$\Leftrightarrow$ les lignes et les colonnes forment deux BON de $\mathbb{C}^n$.

d/ *Propriété* : P unitaire $\Rightarrow |\det P| = +1$. $\det P \in \mathbb{U}$.

6) Groupe unitaire

a/ *Théorème* : L'ens. $U_n(\mathbb{C})$ ou $U(n)$ des matrices unitaires d'ordre n est un ssgpe de $GL_n(\mathbb{C})$. C'est le gpe unitaire d'ordre n.

b/ *Définition* : Le gpe spécial unitaire d'ordre n est le noyau de : $\det : \begin{array}{l} U_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{U} \\ P \mapsto \det P \end{array}$, noté $SU_n(\mathbb{C})$.

c/ *Exemples* : $SU_2(\mathbb{C})$ contient les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.