I) Adjoint d'un endomorphisme

1) Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'adjoint de u est u^*, tel que $\forall x, y \in E$, $(u(x)|y) = (x|u^*(y))$.

2) Existence et unicité de l'adjoint :

a/ Théorème : $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\exists !$ adjoint noté u^*.

b/ Théorème : Si $\mathcal{B}$ est une BON, alors : $M = mat(u, \mathcal{B}) \Rightarrow mat(u^*, \mathcal{B}) = {}^t\overline{M}$. C'est la matrice adjointe de M.

3) Propriétés de l'adjonction :
- $0^*_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$
- $Id^*_{\mathcal{L}(E)} = Id_{\mathcal{L}(E)}$
- $(u+v)^* = u^* + v^*$
- $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*$
- $u \in GL(E) \Rightarrow u^* \in GL(E)$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$
- $u^{**} = u$.

4) Propriétés de l'adjoint : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\begin{cases} Ker\, u^* = (Im\, u)^\perp \\ Im\, u^* = (Ker\, u)^\perp \end{cases}$, $rg\, u^* = rg\, u$. Si F est u-stable, alors $F^\perp$ est u^*-stable.

5) Endomorphismes particuliers :

a/ Définitions :
- u autoadjoint $\Leftrightarrow u^* = u \Leftrightarrow u$ symétrique dans $\mathbb{R}$, ou hermitien dans $\mathbb{C}$. ${}^t\overline{M} = M$
- u anti-autoadjoint $\Leftrightarrow u^* = -u \Leftrightarrow u$ antisym dans $\mathbb{R}$, ou anti-hermitien dans $\mathbb{C}$. ${}^t\overline{M} = -M$
- u normal $\Leftrightarrow u$ commute avec u^*. ${}^t\overline{M}M = M\,{}^t\overline{M}$

b/ Propriété : Si u et v sont autoadjoints, alors : $u \circ v$ autoadjoint $\Leftrightarrow u$ et v commutent.

6) Caractérisation des endomorphismes antisymétriques ($K = \mathbb{R}$)

a/ Propriété : u antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $(x|u(x)) = 0$

b/ Cas où dim E = 3 : Si E orienté de dimension 3, les endom. antisymétriques de E sont les $x \longmapsto a \wedge x$.

Donc, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ antisym, $\exists !\, a \in E \;/\; u = a \wedge \cdot$

. Si : $u = a \wedge \cdot$, avec $a = {}^t(a_1\ a_2\ a_3)$, alors dans une BOND : $mat(u, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$

II) Groupe orthogonal - Groupe unitaire.

1) Définition : Soit E euclidien ou hermitien, et $u \in \mathcal{L}(E)$. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in E$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.

Si $K = \mathbb{R}$ et u conserve la norme, on dit qu'il est "orthogonal". Si $K = \mathbb{C}$, on dit que u est "unitaire".

2) Matriciellement : Soit $\mathcal{B}$ une BON de E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors : u orthogonal ou unitaire $\Leftrightarrow u(\mathcal{B})$ est une BON de E $\Leftrightarrow mat(u, \mathcal{B})$ est orthogonale ou unitaire.

3) Caractérisation par l'adjoint : u orthogonal ou unitaire $\Leftrightarrow u$ inversible et $u^* = u^{-1}$.

4) Exemple : Id_E est orthogonal et unitaire. Les symétries orthogonales : $s_F(x) = 2p_F(x) - Id_E(x)$, sont orthogonales et unitaires.

. Propriété : Si s est une symétrie qui conserve la norme ou le produit scalaire, elle est orthogonale.

Remarquons qu'alors s_F est autoadjointe $s_F^* = s_F$ et $s_F \circ s_F = Id_E$.

- Si codim F = 1, s_F est une réflexion.
- Si codim F = 2, s_F est un retournement.
- Si u est une permutation, alors $u(\mathcal{B})$ est encore une BON, donc u est orthogonal ou unitaire.

5) Groupe orthogonal, groupe unitaire :

. Théorème :
- $\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. C'est un sous-gpe de $(GL(E), \circ)$. On le nomme "groupe orthogonal de E".
 Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det u = \pm 1$.
- $\mathcal{O}^+(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \;/\; \det u = +1\} = S\mathcal{O}(E)$ est le groupe spécial orthogonal.
- $\mathcal{U}(E)$ est l'ensemble des automorphismes unitaires de E. C'est un ssgpe de $(GL(E), \circ)$. On le nomme "groupe unitaire" de E
 Si $u \in \mathcal{U}(E)$, alors $\det u \in \mathbb{U}$.
- $S\mathcal{U}(E) = \{u \in \mathcal{U}(E) \;/\; \det u = +1\}$ est le groupe spécial unitaire.

III) Rappel en espace Euclidien de dim 2

1) $\mathcal{O}^+(E)$: Le groupe $\mathcal{O}^+(E)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$, mais non canoniquement (dépend de la BON). $\mathcal{O}_+(E) \simeq \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R})$

. Théorème : dim E = 2 $\Rightarrow \mathcal{O}^+(E)$ est commutatif.

2) $\mathcal{O}^-(E)$: Quand dim E = 2, les isométries négatives $u \in \mathcal{O}^-(E)$ sont les réflexions.

3) Angles :

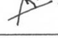
a/ Définition : On définit l'isomorphisme de gpes commutatifs $\alpha : (\mathcal{O}^+(E), \circ) \to (\mathcal{A}, +)$, avec $\mathcal{A}$ = ensemble des angles de E.

On dit que $\alpha(r)$ est l'angle de la rotation $r \in \mathcal{O}^+(E)$.

b/ Propriété : $\exists !\, r \in \mathcal{O}^+(E) \;/\; r(a) = b$, avec a, b des vecteurs unitaires de E.

. Définition : On nomme angle de $(\widehat{a, b})$ l'angle de la rotation r.

c/ Propriété : Soient s et s' les réflexions par rapport aux droites D et D'. Alors $(s \circ s')$ est la rotation d'angle (2γ)



4) Mesure des angles : Soit $u \in \mathcal{O}^+(E)$, avec dim E = 2. Alors $mat(u, \mathcal{B})$ est la même dans toutes les BOND de E.

Donc l'isomorphisme α est canonique lorsque E est orienté.

5) <u>Génération de $O(E)$</u> : Toute rotation $r \in O^+(E)$ s'écrit comme une composée de réflexions $s \circ s'$. Donc les réflexions engendrent $O(E)$.

IV) Propriétés de $O(E)$ en dimension qcq finie.

1) <u>Réflexion échangeant deux vecteurs unitaires</u>

- <u>Propriété</u> : Soient a et b deux vecteurs unitaires de E. $\exists !$ réflexion $s_{a,b}$ telle que $s_{a,b}(a) = b$.
- <u>Conséquence</u> : Si $D = \mathbb{R}a$ et $D' = \mathbb{R}a'$, $\exists$ deux réflexions qui échangent D en D'.

2) <u>Générateur de $O(E)$</u> : $O(E)$ est engendré par les réflexions.

3) <u>Compacité de $O(E)$ et $O^+(E)$</u> : Pour la norme triple sur $\mathcal{L}(E)$, $O(E)$ et $O^+(E)$ sont des fermés bornés en dimension finie, donc sont compacts.
On montre que $O_n(\mathbb{R})$, $O_n^+(\mathbb{R})$, $U_n(\mathbb{C})$, $U_n^+(\mathbb{C})$ sont aussi compacts.

4) <u>Connexité par arcs</u> : $O(E)$ n'est PAS connexe par arcs. En revanche, $O^+(E)$ et $O^-(E)$ sont CPA.

V) Rappels en dimension 3

1) <u>Axe de rotation</u> :
- $\forall u \in O^+(E)$, $1 \in Sp(u)$ lorsque $\dim E = 3$.
- Si $u \in O^+(E)$ et $u \neq Id$, alors $\dim E_u(1) = 1$. Alors $E_u(1)$ s'appelle l'axe de rotation de u.

2) <u>Angle de rotation</u> :
- Soit $u \in O^+(E)$ et $u \neq Id$. Alors $P = E_u(1)^\perp$ est un plan stable par u. Donc $u_{|P} \in O^+(2)$.
- L'angle de rotation de u est alors l'angle de rotation de $u_{|P}$. Pour mesurer l'angle, il faut orienter $P = E_u(+1)^\perp$

3) <u>Retournements</u> : Soit $u \in O^+(E)$. Alors : u retournement $\Leftrightarrow$ u rotation d'angle plat $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Tr} u = -1 \Leftrightarrow -1 \in Sp(u)$.

4) <u>Détermination pratique de l'axe et de l'angle</u> : Soit E orienté.

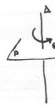
a/ <u>Première méthode</u> : $\operatorname{Tr} u = 1 + 2\cos\theta$; $\sin\theta = (u(e_2) \mid e_3)$ et $\sin\theta = \det(e_1, e_2, u(e_2))$. $\quad \operatorname{mat}(u, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

b/ <u>Seconde méthode</u> : On utilise la partie antisym de u : $u = \frac{u + u^*}{2} + \frac{u - u^*}{2}$.
Alors $\frac{u - u^*}{2} = (a \wedge \cdot)$ avec $a = \sin\theta . e_1$. Et matriciellement : $\operatorname{mat}\left(\frac{u-u^*}{2}, \beta\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}$.

c/ <u>Problème inverse</u> : Dans une BOND adaptée à l'endomorphisme u, où $\mathbb{K}e_1 = E_u(1)$.
On peut exprimer u dans cette base : $u : x \mapsto \cos\theta . x + (1 - \cos\theta).(e_1 \mid x).e_1 + (\sin\theta)\, e_1 \wedge x$.

5) <u>Eléments de $O^-(E)$</u> : On sait que : $u \in O^-(E) \Leftrightarrow -u \in O^+(E)$ en dimension 3.

a/ <u>Spectre</u> : Soit $u \in O^-(E)$, alors $(-1) \in Sp(u)$. Et $\dim E_u(-1) = 1$ si $u \neq -Id$.



b/ <u>Décomposition</u> : Soit $u \in O^-(E)$. Alors le plan $P = E_u(-1)^\perp$ est u-stable. Par conséquent $u_{|P}$ est une rotation de P.
On décompose alors u sous la forme : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{s_P} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_{\Delta = E_u(-1), \theta}}$. Donc $u = R_{\Delta,\theta} \circ s_P$

c/ <u>Caractérisation des réflexions</u> : u réflexion $\Leftrightarrow$ $-u$ retournement.

- <u>Propriété</u> : Soit $u \in O^-(E)$. $\quad u$ réflexion $\Leftrightarrow \operatorname{Tr} u = +1$
$\Leftrightarrow 1 \in Sp\, u$

6) <u>Décomposition d'une rotation</u>.

a/ <u>Décomposition 1</u> : Toute rotation est la composée de deux réflexions. $\quad u = s_p \circ s_q$.

b/ <u>Décomposition 2</u> : Toute rotation est la composée de 2 retournements : $\quad u = (-s_p) \circ (-s_q) = s_{p^\perp} \circ s_{Q^\perp}$