Dualité

I) Espace dual

1) Définitions

a/ Dual de E : Soit E un Kev, $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ est le dual de E.

b/ Exemple : Soit $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i . e_i$. Et, $e_i^* : \begin{cases} E \to K \\ x \mapsto x_i \end{cases}$ est la base canonique de E^*.

c/ Crochet de dualité : $\langle x, \varphi \rangle = \varphi(x)$ est une forme bilinéaire assimilable à un produit scalaire. $x \perp \varphi \Leftrightarrow \langle x, \varphi\rangle = 0$.

Alors, A est orthogonale à $B \subset E^* \Leftrightarrow \forall x \in A, \forall \varphi \in B, \langle x, \varphi \rangle = 0$.

$$\begin{cases} \underset{\subset E^*}{A^\perp} = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\} \\ \underset{\subset E}{B^\circ} = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\} = \bigcap_{\varphi \in B} \operatorname{Ker} \varphi \end{cases}$$

2) Forme linéaire et hyperplan.

. Propriété : H hyperplan $\Leftrightarrow \exists \varphi \in E^* / \varphi \neq 0$ et $\operatorname{Ker}\varphi = H$. On dit que $\varphi(x) = 0$ est une équation de H.

.. Propriété : Soient φ et ψ deux formes linéaires non nulles sur E : $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \Leftrightarrow (\varphi, \psi)$ liée.

3) En dimension finie :

a/ Dimension : $\dim G = n$, alors $\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E,K) = n$.

b/ Base duale d'une base de E : Soit β une base de E. On définit les (e_i^*) qui forment la base duale de E^* de β.

c/ Écritures : $\forall x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) . e_i$ et $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$. $\forall i = 1, \dots, n$, $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$

d/ Écriture matricielle : Soit β sur E et β^* sur E^*. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_\beta$ et $\phi = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{\beta'} = \begin{pmatrix} \varphi(e_1) \\ \vdots \\ \varphi(e_n) \end{pmatrix}_{\beta'}$ alors $\varphi(x) = {}^t\phi . X$

Donc : $\operatorname{mat}_{\beta'} \varphi = {}^t\phi$.

e/ Changement de Base : $P = D_\beta^{\beta'} = \begin{array}{c} e_1' \dots e_n' \\ \left[\quad \right] \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array}$ matrice de passe de β à β'. Alors $X = P . X'$, donc $P_{\beta^*}^{\beta'^*} = ({}^tP)^{-1}$ et $\phi = ({}^tP)^{-1} \phi'$

. Conséquence : Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E nommée base "antiduale".

II) Famille de formes linéaires et application linéaire de $E \to K^p$

1) Définition : $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ des formes linéaires sur E. On définit $u : \begin{cases} E \to K^p \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{cases}$ linéaire. $\operatorname{Ker} u = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker}\varphi_i = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\circ$

2) Théorème : $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sont linéairement indépendantes $\Leftrightarrow$ u surjective.

3) Rang de u : Théorème : $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

4) Caractérisation de $\operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$: $\varphi \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \Leftrightarrow \varphi$ s'annule sur $\operatorname{Ker} u = \bigcap \operatorname{Ker}\varphi_i$

. Conséquence : $(\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\circ)^\perp = \operatorname{Vect}\{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}$.

5) Cas où $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de E^* : On a donc $\dim E = \dim E^* = n$.

a/ Propriété : $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de $E^* \Leftrightarrow$ u est un isomorphisme.

b/ En particulier : $\exists ! (e_1, \dots, e_n) \in K^n / \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. $(e_1, \dots, e_n)$ est alors la base antiduale de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

III) Famille de vecteurs de E et application linéaire de $E^* \to K^p$

1) Définition : $e_1, \dots, e_p$ des vecteurs de E. On définit $v : \begin{cases} E^* \to K^p \\ \varphi \mapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \end{cases}$ linéaire. $\operatorname{Ker} v = \{e_1, \dots, e_p\}^\perp$

2) Théorème : $(e_1, \dots, e_p)$ libre $\Leftrightarrow$ u surjective

3) Théorème : Pour toute famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$, on a : $\operatorname{rg} v = \operatorname{rg}(e_1, \dots, e_p)$.

4) Théorème : $x \in \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) \Leftrightarrow \forall \varphi \in \operatorname{Ker} v$, $\varphi(x) = 0$. Donc : $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_p) = (\{e_1, \dots, e_p\}^\perp)^\circ$

5) Cas d'une base de E : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, alors v est un isomorphisme.

IV) Application aux sev de E et de E^* en dim finie.

1) Sev de E :

a/ Soit $F \hookrightarrow E$ et $\dim F = p$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, alors $v : \begin{cases} E^* \to K^p \\ \varphi \mapsto (\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_p)) \end{cases}$ définit $F^\perp = \{e_1, \dots, e_p\}^\perp$.

b/ Déduction de théorèmes : . $\operatorname{Ker} v = F^\perp$, d'où : $\dim F^\perp = \dim E - \dim F = \operatorname{codim}(F)$.

.. $F^{\perp\circ} = F$ et $F = G \Leftrightarrow F^\perp = G^\perp$

c/ Équations d'un sev : $x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_{n-p}(x) = 0 \end{cases}$ où $(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-p})$ base de $\operatorname{Ker} v$.

d/ Équations d'un sea de E :

$F = F_0 + a$ un sea de E. $x \in F \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = \alpha_1 \\ \dots \\ \varphi_{n-p}(x) = \alpha_{n-p} \end{cases}$, et $F_0 = \bigcap_{i=1}^{n-p} \operatorname{Ker}\varphi_i$

2) Sev de E^* :

a/ Soit $F' \hookrightarrow E^*$ et $\dim F' = p$. Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ une base de F', alors : $u \begin{cases} E \to K^p \\ x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x)) \end{cases}$ définit $F'^\circ = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\circ$.

b/ Déduction de théorèmes : . $\dim F'^\circ = \dim E - \dim F'$

.. $F'^{\circ\perp} = F'$ et $F' = G' \Leftrightarrow F'^\circ = G'^\circ$

3) Intersection d'hyperplans : $H_1, \dots, H_p$ hyperplans de E. On choisit $\varphi_i(x) = 0$ pour chacun d'eux.

. $H_1 \cap \dots \cap H_p$ est défini par $\begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \dots \\ \varphi_p(x) = 0 \end{cases}$.

.. $H_1 \cap \dots \cap H_p = \operatorname{Ker} u = \{\varphi_1, \dots, \varphi_p\}^\circ$

... $\operatorname{codim}(H_1 \cap \dots \cap H_p) = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u = \operatorname{rg} u$.

V) Polynômes interpolateurs de Lagrange

1) Position du problème : Trouver une f° simple telle que $\forall i \in [0, n]$, $f(x_i) = a_i$. On nomme $(x_0, \dots, x_n)$ la base d'interpolation.

2) Remarquons que : Si on crée $\varphi_i : P \mapsto P(x_i)$, alors $u : \begin{cases} K_n[X] \to K^{n+1} \\ P \mapsto (\varphi_0(P), \dots, \varphi_n(P)) = (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{cases}$ est linéaire et on a :

$\exists ! P \in K_n[X] / \forall i = 0 \dots n$, $P(x_i) = a_i$.

3) **Création des polynomes :** $P = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(P) \cdot L_i = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \cdot L_i = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i$ avec $(L_0, \dots, L_n)$ une base de $K_n[X]$ antéduale de $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$.

On calcule alors : $\forall j,\ \varphi_j(L_i) = \delta_{ij} \Rightarrow L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ D'où : $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right)$.

4) **Autre expression des L_i :** On introduit le polynôme : $\omega(X) = \prod_{j=0}^{n} (X - x_j)$, de degré $(n+1)$.

Alors :
$$L_i(X) = \frac{\omega(X)}{(X - x_i) \cdot \omega'(x_i)}.$$