Convergence uniforme / approximation unif. des fonctions

(I) Divers modes de CV des suites de fonctions

1) Convergence simple : (f_n) CV simplement vers $f \iff \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \,/\, \forall n, n \geq N \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$.
. Dans ce cas, seules certaines pptés telles que la "croissance", la "convexité" se conservent.

2) Différentes convergences.
. Si $\forall n$, $f_n \in \mathcal{B}(X,E)$, et $f \in \mathcal{B}(X,E)$, alors on munit $\mathcal{B}(X,E)$ de la norme $N_\infty : f \mapsto \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|_E$.
On définit donc la CV uniforme : $\lim\limits_{n\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.
.. Si $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, alors on munit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ de la norme $N_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)|\,dt$.
On définit donc la CV en moyenne : $\lim\limits_{n\infty} N_1(f_n - f) = 0$
... Si $\forall n$, $f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on peut munir de la norme $N_2 : f \mapsto \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$
On définit donc la CV en moyenne quadratique : $\lim\limits_{n\infty} N_2(f_n - f) = 0$.

(II) Convergence uniforme

1) Définition : (f_n) CV unif vers $f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \,/\, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, \ d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$

2) CV unif. sur des parties de X
a/ CV unif locale : On dit qu'il y a UCV locale de (f_n) vers f, si : $\forall x \in X, \ \exists V \in \mathcal{V}_X(x) \,/\, f_n|_V \rightrightarrows f|_V$
b/ CV unif sur compact : On dit qu'il y a UCV sur tout compact si : $\forall K \subset X$, K compact, $f_n|_K \rightrightarrows f|_K$

3) Propriétés
. Propriété : Si $(f_n) \rightrightarrows f$ et $(g_n) \rightrightarrows g$, alors $(\lambda f_n + \mu g_n) \rightrightarrows \lambda f + \mu g$.
. Propriété : Si (f_n) est une suite d'applications de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et g une appl. bornée de X dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et que $(f_n) \rightrightarrows f$, alors $(g \times f_n) \rightrightarrows g \times f$

4) Critère de Cauchy de CV uniforme
. Théorème : Soit (f_n) une suite d'applications de X dans E complet. Alors, $(f_n) \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \,/\, m > n \geq N \Rightarrow \sup\limits_{x \in X} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$.

(III) Propriétés de la limite dans la CV uniforme

1) Théorème de la continuité
a/ Théorème : Soient X et E des em. Soit (f_n) une suite de fonctions de $X \to E$. Soit $a \in X$. $\begin{cases} \cdot (f_n) \rightrightarrows f \text{ sur } X \\ \cdot \forall n, \ f_n \ C^0 \text{ sur } a \end{cases} \Rightarrow f$ continue en a.
b/ Corollaires : . Si $\forall n$, f_n C^0 sur X, alors f C^0 sur X.
.. Si (f_n) CV unif localement, alors la ppté subsiste.
c/ Exemple : Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, et soit $\begin{cases} x_0 = a, & x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \\ y_0 = b, & y_{n+1} = \sqrt{x_n \cdot y_n} \end{cases}$, alors (x_n) et (y_n) ont la même limite $\ell(a,b)$. C'est la moyenne arithmético-géométrique. La fonction $\ell : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est C^0.

2) Théorème d'interversion des limites, ou th. de la double limite
. Théorème : X métrique, $A \subset X$, $a \in \overline{A}$. Soit $f_n : A \to E$, E complet, une suite de f°. On suppose : $\begin{cases} \cdot f_n \rightrightarrows f \text{ sur } A \\ \cdot \forall n, \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) = \ell_n \text{ existe.} \end{cases}$
Alors : $\begin{cases} \text{- La suite } (\ell_n) \text{ est une suite CV de } E\text{, avec } \ell = \lim\limits_{\infty} \ell_n \\ \text{- Et } \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell. \end{cases}$ Autrement dit : $\lim\limits_{x \to a} \left(\lim\limits_{n\infty} f_n(x)\right) = \lim\limits_{n\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x)\right)$.

(IV) Approximation uniforme des fonctions

On s'intéresse uniquement aux applications définies sur $[a,b]$ et à valeur dans un evn E complet (espace de Banach).

1) Différents types de fonctions rencontrées
a/ $\mathcal{B}(I,E)$: ici, $I = [a,b]$, et $\mathcal{B}(I,E)$ est l'ev des f° bornées de I dans E. Muni de N_∞, il est complet ! $(\mathcal{B}, N_\infty)$ est complet.
b/ $\mathcal{C}(I,E)$: ev des applications continues de $I \to E$. Comme $I = [a,b]$ est compact, toute appl. C^0 est bornée. $\mathcal{C}(I,E) \hookrightarrow \mathcal{B}(I,E)$.
Et comme dans $\mathcal{B}(I,E)$, $\mathcal{C}(I,E)$ est fermé, alors $(\mathcal{C}(I,E), N_\infty)$ est complet.
c/ $\mathcal{E}(I,E)$: ev des fonctions en escaliers. Evidemment, $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{B}$.
d/ $\mathcal{C}_{mor}$: ev des fonctions cpm. $\mathcal{C}_{mor} \hookrightarrow \mathcal{B}$.
e/ $\mathcal{AC}_{mor}$: ev des fonctions affines par morceaux. $\mathcal{AC}_{mor} \hookrightarrow \mathcal{C}$.
f/ $\mathcal{P}$: ev des fonctions polynomiales restreintes à $I \to E$. $\mathcal{P} \hookrightarrow \mathcal{C}$.

. Résumé :
$$\begin{tikzcd} & & \overline{\mathcal{C}} \arrow[d, equal] & \mathcal{AC}_{mor} \arrow[dl] \\ \mathcal{B} & \mathcal{C}_{mor} \arrow[l] & \mathcal{C} \arrow[l] & \\ & \mathcal{E} \arrow[u] & & \mathcal{P} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

2) Fonctions réglées
a/ Définition : Une application bornée $f : I \to E$ est "réglée" $\iff \exists (\varphi_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}} \,/\, \lim\limits_{n\infty} \varphi_n = f$ dans $(\mathcal{B}, N_\infty)$, soit $\varphi_n \rightrightarrows f$.
Autrement dit, f réglée $\iff f \in \overline{\mathcal{E}}$.
b/ Conséquence : L'ens. $\mathcal{R}$ des fonctions réglées se confond avec $\overline{\mathcal{E}}$. Donc $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{R} \hookrightarrow \mathcal{B}$.

3) Approximation unif. des fonctions cpm par des f° en escalier.
. Théorème : Soit $f : I \to E$ cpm. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi : I \to E$ en escalier tq : $\forall x \in I$, $\|\varphi(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.
Autrement dit, f est réglée. Conséquence : $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{C}_{mor} \hookrightarrow \mathcal{R}$ et $\overline{\mathcal{C}_{mor}} = \mathcal{R}$.

4) Approx. unif. des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux
Théorème : Soit $f : I \to E$ continue. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \varphi : I \to E$ continue affine par morceaux tq : $\forall x \in I$, $\|\varphi(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$. Alors : $\overline{\mathcal{AC}_{mor}} = \mathcal{C} \ (= \overline{\mathcal{C}})$

5) Approximation polynomiale

. Théorème de (Stone) Weierstrass : Soit $f : I \to E$, C^0 et soit $\varepsilon > 0$. $\exists$ une appl. polynomiale $g : I \to E$ tq $\forall x \in [a,b]$, $\| f(x) - g(x) \| \leq \varepsilon$.
On peut donc écrire, $\exists (g_n) \in \mathcal{P}^{\mathbb{N}}$ / $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$, dans (B, N_∞). Donc $g_n \rightrightarrows f$.