Continuité - Limite

I) Continuité

1) Définition : Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $a \in E$ et $f : E \to E'$. f continue en $a \Leftrightarrow \forall V' \in \mathcal{V}_{E'}(f(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \ /\ f(V) \subset V'$

On a encore : $f\ C^0$ en $a \Leftrightarrow \forall r' > 0,\ \exists r > 0 \ /\ \forall x \in E,\ d(a,x) < r \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < r'$.

2) Exemples :

a/ Applications lipschitziennes : $f : E \to E'$ est k-lipschitzienne $\Leftrightarrow \forall x,y \in E,\ k.d(x,y) \geq d'(f(x), f(y))$. En prenant $r = \frac{r'}{k+1}$, on constate que f C^0 en tout point.

b/ Projections : Soient $(E_i, d_i)_{i=1..n}$ des em. On définit $E = E_1 \times ... \times E_n$, avec $d(x,y) = \max(d_i(x_i, y_i))$ et $p_i : \begin{matrix} E \to E_i \\ x \mapsto x_i \end{matrix}$. p_i est 1-lipschitzienne et C^0.

c/ Isométries : $f : E \to E'$ est une isométrie, ie $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$, est 1-lipschitzienne donc continue.

3) Propriétés :

a/ Composée : $f : E \to E'$ continue en a, et $g : E' \to E''$ continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.

b/ Fonctions dans un espace produit : $f : E \to E' = E'_1 \times ... \times E'_n$. $f_i = p_i \circ f : E \to E'_i$. Alors, $f\ C^0$ en $a \Leftrightarrow \forall i,\ f_i\ C^0$ en a.

c/ Restriction : A une partie de E, et $f : E \to E'$ C^0 en $a \in E$. Si $a \in A$, alors f_A C^0 en a. La réciproque est fausse.

4) Continuité globale

a/ Définition : $f : E \to E'$ est C^0 sur $E \Leftrightarrow f\ C^0$ en chaque point de E.

b/ Théorème : $f\ C^0$ sur $E \Leftrightarrow \forall \omega' \in \mathcal{T}(E'),\ f^{-1}(\omega') \in \mathcal{T}(E) \Leftrightarrow \forall \phi'$ fermé de E', $f^{-1}(\phi')$ est un fermé de E.

c/ Exemple : $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est C^0, donc $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert.

5) Applications ouvertes, fermées.

a/ Définition : $f : E \to E'$ est ouverte (resp fermée) ssi l'image d'un ouvert de E par f est un ouvert de E' (resp. fermé)

b/ Rq : Les projections sont ouvertes.

6) Homéomorphismes

a/ Définition : (E,d) et (E',d') des em. $f : E \to E'$ est un homéomorphisme $\Leftrightarrow$ f bijective et bicontinue.

b/ Caractérisation : f homéomorphisme $\Leftrightarrow$ f bij, et f C^0 et ouverte $\Leftrightarrow$ f bij, C^0 et fermée.

7) Application aux comparaisons de Topologies :

Soit E muni de d_1 et d_2, qui nous donnent deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$. Par définition :

. $\mathcal{T}_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_2 \Leftrightarrow Id_E : (E, d_1) \to (E, d_2)$ est C^0

.. d_1 et d_2 sont topologiquement équivalentes $\Leftrightarrow Id_E : (E,d_1) \to (E,d_2)$ homéomorphisme.

... $d_2 \leq \alpha . d_1 \Leftrightarrow Id_E : (E,d_1) \to (E,d_2)$ est α-lipschitzienne.

8) Application à $\overline{\mathbb{R}}$

a/ Définition d'une distance sur $\overline{\mathbb{R}}$: Soit $f : \begin{cases}]-1,+1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{1-|x|} \end{cases}$. f est un homéomorphisme et $f^{-1}(x) = \frac{x}{1+|x|}$. On prolonge f sur $\mathbb{R}$ en prenant $\overline{f}(-1) = -\infty$ et $\overline{f}(+1) = +\infty$. $\overline{f}$ est une bijection, strictement $\nearrow$, de $[-1,1]$ sur $\overline{\mathbb{R}}$.

On a transposé une distance d sur $\overline{\mathbb{R}}$: $\forall x,y \in \overline{\mathbb{R}}$, $d(x,y) = |\overline{f}^{-1}(x) - \overline{f}^{-1}(y)|$

$\overline{\mathbb{R}}$ est donc un em borné, car $d(x,y) \leq 2$.

b/ Espace métrique induit $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$: $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ est lui aussi borné. On a : $d_{\mathbb{R}}$ et $|x-y|$ sont deux distances topologiquement équivalentes.

II) Continuité uniforme

1) Définition : $f : E \to E'$ est uniformément continue $\overset{\text{sur } E}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \ /\ \forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

2) Propriété : Toute application u-C^0 sur E est C^0 sur E. Et, une composée d'appl. uC^0 est uC^0.

III) Continuité des applications linéaires

1) Théorème : Soient E, E' deux evn. Soit $u \in \mathcal{L}(E,E')$. On a l'équivalence :

. u lipschitzienne
. u est unif C^0 sur E
. u est C^0 sur E
. u est C^0 en O_E
. u bornée sur $B'_E(O_E, 1)$
. u bornée sur $S_E(O_E, 1)$
. $\exists k \geq 0 \ /\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k\|x\|$.

2) Norme d'une application linéaire continue.

a/ Propriété : Les deux nombres $\sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ et $\sup\limits_{x \in S(O_E, 1)} \|u(x)\|$ existent et sont égaux.

b/ Définition : On définit la norme triple de l'application linéaire continue u : $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$.

On a donc : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq |||u|||.\|x\|$.

c/ Propriété : $\mathcal{L}_c(E,E') = \mathcal{L}(E,E') \cap \mathcal{C}(E,E')$.

. Théorème : $(\mathcal{L}_c(E,E'), |||\cdot|||)$ est un evn.

. Théorème : Soient $u \in \mathcal{L}_c(E,E')$ et $v \in \mathcal{L}_c(E',E'')$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,E'')$, et $|||v \circ u||| \leq |||v|||.|||u|||$

. Théorème : Si E est de dim finie, alors $\mathcal{L}_c(E) = \mathcal{L}(E)$. On transporte donc la norme sur les matrices associées.

3) Exemples :

a/ $(E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $u : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_a^b f(t)dt \end{cases}$. Alors u est linéaire, continue, car $|u(f)| \leq (b-a) |||f|||_\infty$.

IV) Applications multilinéaires et continuité

$E = E_1 \times ... \times E_n$ un Kevn.

1) Théorème de continuité : Nous avons l'équivalence entre les propriétés :

. u C^0
. u C^0 en O_E
. u bornée sur $B'_1 \times ... \times B'_n$
. u bornée sur $S'_1 \times ... \times S_n$
. $\exists k \geq 0 \ /\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| \leq k \|x_1\|.\|x_2\| ... \|x_n\|$.

. Remarque : E est muni de la norme produit.

2) Norme d'une application n-linéaire continue :

. $|||u||| = \sup\limits_{\substack{x_1 \in E_1 \setminus \{0\} \\ ... \\ x_n \in E_n \setminus \{0\}}} \frac{\|u(x_1, ..., x_n)\|}{\|x_1\| ... \|x_n\|} = \sup\limits_{(x_1, ..., x_n) \in S_1 \times ... \times S_n} \|u(x_1, ..., x_n)\|$

.. $\mathcal{L}_{c,n}(E_1 \times ... \times E_n, E')$ est l'ens. des appl. n-linéaires C^0 sur $E_1 \times ... \times E_n$

V) Limites

1) Définitions : Soit (E,d) et (E',d') deux em. A une partie non vide de E. Soit $f : A \to E'$, $a \in \overline{A}$ et $l \in E'$.

. f admet la limite l en a, s'il existe $\overline{f} : A \cup \{a\} \to E'$ tq : $\begin{cases} \overline{f}_A = f \\ \overline{f}(a) = l \\ \overline{f}\ C^0 \text{ en } a \end{cases}$

. Ce qui équivaut à : $\forall V' \in \mathcal{V}_{E'}(l),\ \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \ /\ f(V \cap A) \subset V'$

2) Propriétés :

a/ Unicité de la limite

b/ Propriété : Si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$, alors $l \in \overline{f(A)}$

c/ Fonction à valeur dans un produit : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall i = 1,\dots,n,\ \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_i(x) = l_i$

d/ Composition des limites : $f: A\subset E \to E'$, et $g: B\subset E' \to E''$ tq $f(A)\subset B$. $\left[\lim\limits_{x\to a} f = l \text{ et } \lim\limits_{y\to l} g = l'\right] \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g\circ f = l''$.

3) Cas d'un evn : $f+\lambda g \to l+\lambda l'$

(VI) Suites dans un evn

1) Définition : Une suite de E est une application $f: \mathbb{N} \to E$.

2) Convergence d'une suite :

a/ Définition : $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ CV vers $l\in E \Leftrightarrow \forall V\in\mathcal{V}_E(l),\ \exists N \,/\, \forall n\geq N,\ x_n\in V$.

b/ Unicité de la limite

3) Points adhérents

. Propriété : Soit $A\subset E$ et $a\in E$. $a\in\overline{A} \Leftrightarrow \exists (x_n)\in A^{\mathbb{N}} \,/\, \lim x_n = a$.

4) Continuité en un point : $f: E\to E'$, $a\in E$. f C^0 en $a \Leftrightarrow \forall (x_n)\in E^{\mathbb{N}}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = f(a)$.

5) Caractérisation d'une limite : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l \Leftrightarrow \forall (x_n)\in A^{\mathbb{N}}, \lim x_n = a \Rightarrow \lim f(x_n) = l$

6) Continuité uniforme : $f: E\to E'$ est uC^0 sur E $\Leftrightarrow \forall (x_n),(y_n)\in E^{\mathbb{N}}, \lim d(x_n,y_n) = 0 \Rightarrow \lim d'(f(x_n),f(y_n)) = 0$

(VII) Suites extraites, Valeurs d'adhérence

1) Définition : Soit $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, φ strict ↑, alors : si $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$, $(x_{\varphi(n)})\in E^{\mathbb{N}}$ est une suite extraite.

2) Suite extraite d'une suite CV : Si (x_n) CV, alors toute suite extraite admet la même limite.

3) Valeur d'adhérence :

a/ Définition : a est une valeur d'adhérence de $(x_n) \Leftrightarrow \exists\varphi \,/\, (x_{\varphi(n)})$ CV vers a.

b/ Cas d'une suite CV : une suite CV possède une unique valeur d'adhérence.

c/ Théorème : Soit $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ et notons $A_n = \{x_k,\ k\geq n\}$.

. Il y a équivalence entre :
- . a val. d'adhérence de (x_n)
- . $\forall V\in\mathcal{V}_E(a)$, $\{n\in\mathbb{N} \,/\, x_n\in V\}$ est ∞
- . $a\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}$
- . $\forall\varepsilon>0, \forall N\in\mathbb{N}, \exists n\geq N \,/\, d(x_n,a) < \varepsilon$

d/ Conséquence : L'ens. $\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{A_n}\right)$ des valeurs d'adhérence d'une suite (x_n) est un fermé.