Connexité par arcs

(I) Théorème des Valeurs intermédiaires

1) **Rappel** : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. S'il existe $a, b \in I$ / $f(a).f(b) < 0$ alors $\exists c \in]a,b[$ / $f(c) = 0$.

2) **Corollaires** : . L'image $f(I)$ de l'intervalle I par l'appl. f continue est un intervalle.
.. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et I intervalle, et si f ne s'annule pas sur I, alors f garde un signe constant sur I.

(II) Connexité par arcs

1) **Définition** : . Soit E un em. E connexe par arcs $\Leftrightarrow \forall x, y \in E$, $\exists f : [0,1] \to E$ continue telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.
On dit que f est "un chemin continu" de x à y. Valable aussi pour $f : [a,b] \to E$ avec a, b quelconques.

2) **Exemples**

a/ Les singletons sont CPA.

b/ Théorème : les intervalles sont les parties CPA de $\mathbb{R}$.

c/ Parties convexes d'un evn : Toute partie convexe est CPA.

d/ Parties étoilées d'un evn : $A \subset E$ est dite étoilée par rapport à $a \in A$, ssi $\forall x \in A$, $[a,x] \subset A$. Les parties étoilées sont CPA

(III) Images continues de CPA

1) **Théorème** : Soit E un em CPA et $g : E \to E'$ continue. Alors $g(E)$ est une partie CPA de E'.

2) **Corollaires** : . Soit $g : E \to \mathbb{R}$ avec E CPA, alors $g(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
.. Si $g : E \to \{0,1\}$ est C^0 et E CPA, alors g est constante.

(IV) Propriétés Topologiques

1) **Théorème** : Soit E un em CPA. Alors les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\emptyset$.

2) **Reformulation du Théorème** : . Il n'existe pas de partition de E en deux ouverts non vides.
.. Il n'existe pas de partition de E en deux fermés non vides.

3) **Applications**

a/ Propriété : Soit E un em, CPA, et $f : E \to E'$ localement constante en tout point. Alors f est constante.

b/ Théorème du passage des douanes : Soit E un em et A une partie de E. Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to E$, C^0, telle que : $f(a) \in \mathring{A}$ et $f(b) \in \mathring{\overline{\complement A}}$.
Alors $\exists c \in [a,b]$ / $f(c) \in Fr(A)$.

(V) Propriétés générales

1) **Réunion** : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties CPA de E, et telle que $\exists i_0 \in I$ / $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$, $\forall i \in I$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est CPA.

2) **Remarque** : Une intersection de deux parties CPA ne l'est pas nécessairement : A  B

3) **Produit de CPA** : Si E et F sont CPA, alors $E \times F$ est aussi CPA.

(VI) Composantes CPA

1) **Définition** : Soit (E,d) un em et $x \in E$. $C(x) = \bigcup_{\substack{A \subset E \text{ et CPA} \\ x \in A}} A$ est CPA. On le nomme "composante CPA de x".
C'est la plus gde partie CPA de E contenant x.

2) **Propriété** : L'ens. des composantes CPA constitue une partition de E.

(VII) Exemples dans les evn

1) **Basiques** : . les parties convexes ou étoilées sont CPA .. Les boules ouvertes ou fermées sont convexes, donc CPA.

2) **$E \setminus \{x\}$** : Soit E un Kevn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et $x \in E$, alors : . Si $K = \mathbb{R}$ et $\dim E = 1$, $E \setminus \{x\}$ n'est pas CPA.
.. Sinon, $E \setminus \{x\}$ est CPA

3) **Sphères** : Soit E un Kevn ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $S(a,r)$ une sphère de E avec $r > 0$. . Si $\dim E = 1$ et $K = \mathbb{R}$, $S(a,r)$ n'est pas CPA.
.. Sinon, $S(a,r)$ est CPA.

4) **Composantes CPA des ouverts de E (evn)** : Soit $\omega \neq \emptyset$ un ouvert de l'evn E. Soit C une composante CPA de ω (incluse dans ω)

. Propriété : C est un ouvert de E.
.. Corollaire : C est un fermé de ω.
) Donc C est un ouvert et fermé de ω.