Espaces complets

I) Suites de Cauchy

1) **Définition** : Soit (E,d) un em. $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, m \geq n \geq N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$.
Cela équivaut encore à : $A_n = \{x_k \,/\, k \geq n\}$ et $\delta A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2) **Exemple important** : Toute suite CV est de Cauchy.

3) **Propriété des suites de Cauchy** :

a/ Propriété : Toute suite de Cauchy est bornée.

b/ Propriété : Si une suite de Cauchy possède une valeur d'adhérence, elle cv.

c/ Dans un espace produit : Soit $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ un em produit, et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$. (x_n) est de cauchy de $E \Leftrightarrow \forall i = 1 \dots p$, (x_n^i) est de Cauchy E_i

d/ Propriété : L'image d'une suite de Cauchy par une appl. u-C^0 est une suite de Cauchy.

e/ Remarque : La notion "de Cauchy" est métrique et non topologique.

II) Espaces complets

1) **Définition** : (E,d) est un em complet ssi toute suite de Cauchy de E converge dans E. Un evn complet est un espace de Banach.

2) **Exemples** : $\mathbb{R}$ est complet, $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, $]0,1[$ n'est pas complet.

3) **Parties complètes et parties fermées** : Théorème :
- Si A est complète dans E, alors A est fermée dans E
- Si E est complet et A est fermée dans E, alors A est complète.

4) **Produit d'espaces complets** : Si $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ et chaque E_i est complet, alors E est complet.

5) **Exemple important** : Théorème : Tout em compact est complet.
Théorème : Si dans un em E, les boules fermées sont compactes, alors E est complet.

6) **La notion de complétude est métrique** : Elle n'est pas topologique. Si d et d' sont équivalentes sur E, (E,d) complet $\Leftrightarrow$ (E,d') complet.

III) Théorème d'existence

1) **Théorème des fermés emboîtés** : Soit E un em complet, et soit (F_n) une suite de fermés non vides, telle que $\begin{cases} \forall n, \ F_{n+1} \subset F_n \\ \delta F_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$
alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton, notamment $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

2) **Critère d'existence d'une limite** : Théorème : Soit $f : A \subset E \to E'$ avec E' complet, et $a \in \overline{A}$.
f admet une limite en $a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \,/\, \forall x,y \in (V \cap A)$, $d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$.

3) **Prolongement d'application u-continue** : Théorème : Soit $f : E \to E'$ avec E' complet, et f k-contractante de rapport $k < 1$. Alors :
$\begin{cases} \cdot \text{ L'équation } f(x) = x \text{ possède dans } E \text{ une unique racine } r. \\ \cdot\cdot\ \forall a \in E, \text{ la suite } (x_n) \text{ tq } x_0 = a \text{ et } f(x_n) = x_{n+1} \text{ converge vers } r. \end{cases}$

IV) Théorème du point fixe

1) **Théorème (du pt fixe)** : Soit E un em complet et $f : E \to E$, contractante de rapport $k < 1$. Alors :
$\begin{cases} \cdot \text{ L'équation } f(x) = x \text{ possède dans } E \text{ une unique racine } r \\ \cdot\cdot\ \forall a \in E, \text{ la suite } (x_n) \text{ tq } x_0 = a \text{ et } f(x_n) = x_{n+1} \text{ converge vers } r. \end{cases}$

2) **Majoration de $d(x_n, r)$** : On a montré dans le th. précédent que $d(x_n, x_m) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$ lorsque $n \leq m$. Par passage à la limite sur m :
$d(x_n, r) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$

3) **Cas d'une itérée contractante** : Soit $f : E \to E$, avec E complet, telle que $f^p = f \circ \dots \circ f$ est contractante. Alors $\exists!\, r \in E \,/\, f^p(r) = r$.
On en déduit $f(r) = r$, et c'est le seul point fixe de f. Les propriétés du th. subsistent.

4) **Théorème du point fixe avec paramètre** : Soit E un em complet et Λ un em quelconque. Et soit $f : \begin{array}{l} \Lambda \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto f(\lambda, x) \end{array}$.
On suppose que f vérifie : $\begin{cases} \cdot\ \exists k \in [0,1[\,/\, \forall \lambda \in \Lambda, \ x \mapsto f(\lambda, x) \text{ est } k\text{-contractante.} \\ \cdot\cdot\ \forall x \in E, \ \lambda \mapsto f(\lambda, x) \text{ est continue.} \end{cases}$
Le théorème du point fixe s'applique alors à chaque $f_\lambda : x \mapsto f(\lambda, x)$, et $\exists!\, r_\lambda \in E \,/\, f(\lambda, r_\lambda) = r_\lambda$.
- Théorème : L'application $\begin{cases} \Lambda \to E \\ \lambda \mapsto r_\lambda \end{cases}$ est continue.

V) Théorème de Baire :

1) **Théorème (de Baire)** : Soit E un em complet, et $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts partout denses dans E. Alors $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega_n\right)$ est partout dense dans E : $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \omega_n} = E$. ⚠ $\bigcap \omega_n$ n'est pas ouverte en général.

2) **Formulation à l'aide des fermés** : Soit $\phi_n = \complement_E \omega_n$, c'est un fermé de E. ω_n partout dense $\Leftrightarrow \overline{\omega_n} = E \Leftrightarrow \mathring{\phi}_n = \emptyset \Leftrightarrow \phi_n$ fermé rare.
Donc : $\overline{\bigcap \omega_n} = E \Leftrightarrow \overset{\circ}{\overline{\bigcup \phi_n}} = \emptyset$.
- Théorème : Si E complet, alors une suite ϕ_n de fermés rares $(\mathring{\phi}_n = \emptyset)$ vérifie : $\overset{\circ}{\overline{\bigcup \phi_n}} = \emptyset$.