I Définition séquentielle de la compacité

1) Définition : un evn (E,d) est dit compact si toute suite de $E^{\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence dans E.

2) Exemple : $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Th de BW : tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.

3) Propriétés des parties compactes

a/ Propriété : . Si A est une partie compacte de (E,d), alors A est fermée dans E.
.. Si (E,d) est compact et si A est fermé dans E, alors A est compact.

b/ Propriété : Toute partie compacte A d'un evn est bornée. En particulier, tout compact est borné.

c/ Théorème : Toute partie compacte d'un evn est fermée et bornée.

d/ Théorème : Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées.

4) Produits de compacts

a/ Théorème : Soient E, F deux evn compacts. Alors le produit $E\times F$ est compact.

b/ Théorème : Les parties compactes de $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés. Ceci est valable pour toute norme.

5) Réunions et intersections

a/ Propriété : Si A et B sont compacts dans E, alors $A\cup B$ aussi. Ceci est vrai pour toute réunion finie.

b/ Propriété : Toute intersection de compacts est compacte.

6) Une réciproque : Soit E un evn compact, et $(x_n)\in E^{\mathbb{N}}$ possédant une seule valeur d'adhérence a. Alors (x_n) CV vers a.

7) Partie relativement compacte

a/ Définition : Une partie A de E est dite relativement compacte à E si $\overline{A}$ est compact dans E.

b/ Caractérisation : A est relativement compacte à E $\Leftrightarrow$ $\forall (x_n)\in A^{\mathbb{N}}$, on peut extraire $(x_{\varphi(n)})$ CV dans E

c/ Exemple : Les parties relativement compactes de $\mathbb{R}$ sont les parties bornées.

II Applications continues sur un compact

1) Continuité

a/ Théorème : Soit E un evn compact et $f : E\to E'$ continue sur E. Alors $\mathrm{Im} f = f(E)$ est aussi un compact de E'

b/ Fonctions de $\mathbb{R}$: Soit $f : E\to\mathbb{R}$, continue, et E compact. Alors $f(E)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$. Donc : f bornée sur E et atteint ses bornes.

2) Continuité uniforme : Théorème de Heine : Soit $f : E\to E'$, C^0, et E compact. Alors f est u-C^0 sur E.

3) Homéomorphismes : Théorème : Soit $f : E\to E'$, tq f bijective, continue, et E compact. Alors f est un homéomorphisme de E sur E'.

III La définition de Borel-Lebesgue

1) Notion de recouvrement ouvert

. Soit (E,d) un evn. On appelle recouvrement ouvert de E toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ telle que : $\begin{cases} \forall i,\ \omega_i \text{ est un ouvert de E} \\ \bigcup_{i\in I} \omega_i = E \end{cases}$

.. Si $(\omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de E, et que $J\subset I$ avec $\bigcup_{i\in J}\omega_i = E$, alors $(\omega_i)_{i\in J}$ est un sous-recouvrement ouvert du précédent.

... Si A est une partie de E, et une famille $(\omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de A ssi : $\forall i\in I$, ω_i ouvert de E et $\bigcup_{i\in I}\omega_i \supset A$.

2) Définition : un evn (E,d) vérifie la propriété de Borel-Lebesgue si de tout recouvrement ouvert de E on peut extraire un sous-recouvrement ouvert fini. C'est une notion topologique.

. Reformulation pour les fermés : E vérifie B-L si pour toute famille $(\phi_i)_{i\in I}$ de fermés de E telle que $\bigcap_{i\in I}\phi_i = \emptyset$, il existe $J\subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J}\phi_i = \emptyset$.

.. Contraposée : E vérifie B-L si : $(\phi_i)_{i\in I}$ famille de fermés de E tq $\forall J\subset I$ fini, alors $\bigcap_{i\in J}\phi_i \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i\in I}\phi_i\neq\emptyset$.

3) Equivalence BL $\Leftrightarrow$ compact pour un evn

a/ Théorème : Si E vérifie Borel Lebesgue, alors E est compact.

b/ Lemme : Soit (E,d) compact. Alors $\forall\varepsilon>0$, $\exists$ une famille finie de boules ouvertes de rayon ε dont la réunion est E.
ie : $\exists (x_1,\dots,x_p)\in E^p \ / \ E = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i,\varepsilon)$.

c/ Théorème : Tout evn compact possède la propriété de BL.

d/ Définition : On appelle un nombre de Lebesgue un $\varepsilon>0$ tel que $\forall x\in E, \exists i\in I \ / \ B(x,\varepsilon)\subset\omega_i$.
Ceci n'est valable que pour un compact !